PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY A
MATHEMATICAL, PHYSICAL & ENGINEERING SCIENCES

Uber Reihen auf der Convergenzgrenze

Emanuel Lasker

Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 1901 **196**, 431-477
doi: 10.1098/rsta.1901.0009

IX. *Über Reihen auf der Convergenzgrenze.*

Von Emanuel Lasker, *Dr. Phil.*

Communicated by Major MacMahon, *F.R.S.*

Received March 15,—Read April 5, 1900. Revised February, 1901.

1. Es seien $x_1 \ldots x_r$ r complexe Variabele, welche in einem $2r$-dimensionalen fictiven Raume als Coordinaten seiner reellen Punkte dienen mögen. Das System der Werte $x_1 \ldots x_r$ sei kurz mit "Punkt" $x_1 \ldots x_r$ bezeichnet. Sind $e_1 \ldots e_r$ r positive endliche im übrigen beliebig kleine Zahlen, und nimmt η_i alle complexen Werte an, die der Ungleichung

$$|\eta_i| \leqq e_i$$

genügen, so heisse das Aggregat aller Punkte

$$x_1 + \eta_1,\ x_2 + \eta_2, \ldots x_r + \eta_r$$

die *Nachbarschaft* des Punktes $x_1 \ldots x_r$.

2. Es sei ferner $u_1, u_2 \ldots u_n \ldots$ eine Folge unendlich vieler Functionen von $x_1 \ldots x_r$ und

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

absolut und gleichmässig convergent für die Nachbarschaft eines Punktes $P \equiv x_1 \ldots x_r$. P wird dann *innerer Convergenzpunkt* der Reihe $\Sigma_1^\infty u_n$ genannt werden. Die Gesammtheit aller inneren Convergenzpunkte der Reihe bilden ihren *inneren Convergenzbereich*, die Begrenzung dieses Bereiches ihre *Convergenzgrenze.* Ist die Reihe absolut, aber nicht gleichmässig in der Nachbarschaft von P convergent; oder convergiert sie in P absolut, jedoch nicht mehr in der Nachbarschaft von P, so heisst P "äusserer Convergenzpunkt" der Reihe. Das Aggregat der äusseren Convergenzpunkte der Reihe formt geometrische Gebilde, die "äussere Convergenzgebilde" der Reihe genannt werden mögen.

Wir werden im folgenden nur von den inneren Convergenzbereichen und der Convergenzgrenze reden, viele der folgenden Untersuchungen bleiben aber anwendbar auch auf äussere Convergenzgebilde und deren Grenzen.

3. P durchlaufe eine continuierliche oder discontinuierliche Folge von Lagen

$$P_1,\ P_2 \ldots P_n \ldots$$

29.5.1901

im inneren Convergenzbereiche der Reihe, derart dass die Folge der P nur *einen* Grenzpunkt L zulasse, welcher auf der Convergenzgrenze gelegen ist. Die Summe $f = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ stellt eine Function von P dar, und die den Lagen $P_1 \ldots P_n \ldots$ entsprechenden Werte seien mit $f_1, f_2 \ldots f_n \ldots$ bezeichnet. Die folgende Untersuchung beschäftigt sich dann mit dem Verhältnis von $\lim\limits_{n=\infty} f_n$ zu dem Werte, den $u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ in $P = L$ annimmt, und mit der asymptotischen Darstellung von f in L bei zu Grundelegung des Grenzüberganges

$$P \equiv \underset{n=\infty}{P_1, P_2,} P_3 \ldots P_n \ldots$$

überhaupt.

4. Es sei *in* L die Reihe convergent und ihr Wert mit f_L bezeichnet. Alsdann ist

$$\lim_{n=\infty} f_n = f_L$$

immer dann, wenn die Reihe

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

bei zu Grundelegung des Grenzüberganges

$$P \equiv P_1, P_2, P_3 \ldots P_n \ldots$$

gleichmässig convergiert, d. h. wenn sich bei vorgegebener Zahl δ Indices N, M angeben lassen, so dass

$$|u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots| < \delta,$$

sobald als P irgend eine der Lagen $P_M, P_{M+1}, P_{M+2} \ldots$ einnimmt. Dieser Satz ist wohlbekannt. Ein Specialfall desselben sagt aus: Ist die Reihe

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

in L absolut convergent, und convergiert auch die Reihe

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots,$$

wo U_h den Maximalwert des Moduls von u_h bezeichnet, wenn P die Lagen $P_1, P_2 \ldots P_n \ldots$ durchläuft, so ist

$$\lim_{n=\infty} f_n = f_L.$$

Der Satz kann dazu dienen, bis zu einem gewissen Grade Aufschluss zu geben über das asymptotische Verhalten von $u_1 + \ldots + u_n + \ldots$, wenn P die Lagen P_i durchläuft. Es sei z. B. angesetzt

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

Der Convergenzradius der Reihe sei $= 1$. Die Reihe multiplicieren wir mit $(1-x)^\lambda$, wo λ eine positive Grösse bezeichnet, und erhalten

$$\mathrm{F}(x) \cdot (1-x)^\lambda = \Sigma_0^\infty c_n x^n \cdot (1-x)^\lambda.$$

Wir lassen nun x die positiven Werte zwischen 0 und 1 durchlaufen und wenden obiges Criterion an. Der Maximalwert von $x^n(1-x)^\lambda$ unter den obigen Umständen ist $= \dfrac{n^n \cdot \lambda^\lambda}{(n+\lambda)^{n+\lambda}}$. f_{L} ist offenbar $= 0$, da jedes Glied der Reihe in $x = 1$ verschwindet. Mithin ist

$$\lim_{x=1} \mathrm{F}(x) \cdot (1-x)^\lambda$$

immer dann $= 0$, wenn $\Sigma \dfrac{c_n}{n^\lambda}$ absolut convergiert; und dasselbe gilt offenbar auch für

$$\lim_{x=j} \mathrm{F}(x) \cdot (x-j)^\lambda,$$

wo j irgend ein Punkt des Convergenzkreises.

Ist umgekehrt bekannt, dass für einen bestimmten Wert von λ und irgend einen Punkt des Convergenzkreises j $\lim\limits_{x=i} \mathrm{F}(x) \cdot (x-j)^\lambda$ *nicht* gleich 0 ist, so folgt daraus die Divergenz von

$$\Sigma_1^\infty \frac{c_n}{n^\lambda}.$$

Genau analoge Untersuchungen lassen sich vielfach anstellen, z. B. bei Annahme von Potenzreihen von mehr als 1 Veränderlichen, bei zu Grundelegung von Reihen der Form $\Sigma_1^\infty \dfrac{1}{x+a_n}$, bei Betrachtung von Integralen etc. Ergänzt, und in gewissem Sinne erweitert, wird der Satz durch die nun folgende Überlegung.

5. Es sei in $\mathrm{P} \equiv \mathrm{L}$ die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

divergent. Gesucht ist ein Criterion, welches anzeigt, dass daraufhin $\lim\limits_{n=\infty} f_n = \infty$.

Wir behaupten, dies sei immer der Fall, wenn sich irgend eine endliche Zahl c angeben lässt, derart dass die Ungleichung

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots| > c \cdot (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots)$$

gültig bleibt für *alle* Lagen von P, deren Index grösser ist als eine angebbare endliche Zahl N. Dies Criterion sei das Criterion K genannt.

Um seine Existenz zu beweisen schliessen wir wie folgt. Es ist für alle Lagen von P

$$\begin{aligned}\mathrm{F} &= |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \\ &> |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_h|,\end{aligned}$$

wo h irgend eine endliche Zahl. Nun ist

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

in $\mathrm{P} = \mathrm{L}$ divergent; mithin lässt sich ein Index h angeben, derart dass in $\mathrm{P} = \mathrm{L}$

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_h| > \eta ,$$

wie gross η auch sei. Andererseits sind die u_i in den Lagen $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3 \ldots \mathrm{P}_n \ldots$ stetig und endlich (oder diese Untersuchung würde gar keinen Sinn haben), und dasselbe gilt somit für die $|u_i|$. Ist daher δ eine beliebig kleine endliche vorgegebene Zahl, so ist es möglich, einen Index M zu finden, derart dass für alle Lagen von P deren Index $\geqq$ M, der Wert von

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_h|$$

in $\mathrm{P} = \mathrm{L}$ sich von dem Wert desselben Ausdruckes für obige Lagen von P um weniger als δ unterscheide. Somit ist der Wert von F in $\mathrm{P} = \mathrm{P}_n$, wo $n > \mathrm{M}$ ist, grösser als $\eta - \delta$. Dies besagt dass F, wenn P die Lagen $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \ldots \mathrm{P}_n \ldots$ durchläuft, über alle Grenzen wächst. Es ist somit

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{F} = \infty ,$$

und somit infolge der Ungleichung

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots| > c . (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots)$$

auch
$$\lim_{n=\infty} f_n = \infty \quad q.\ e.\ d.$$

6. Es seien nun

$$f = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$
$$\psi = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

zwei Reihen, von denen bekannt sei, dass die zweite dem Criterion K genüge, und dass, wenn P die Lagen $\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_n \ldots$ durchläuft,

$$\lim_{\mathrm{P}=\mathrm{L},\ n=\infty} \frac{u_n}{v_n} \textit{ gleichmässig} = \text{einer endlichen Grösse } \rho.$$

Alsdann genügt auch die erste Reihe dem Criterion K; es ist also

$$\lim_{\mathrm{P}=\mathrm{L}} f = \infty , \qquad \lim_{\mathrm{P}=\mathrm{L}} \psi = \infty ,$$

und ferner findet sich

$$\lim_{\mathrm{P}=\mathrm{L}} \frac{f}{\psi} = \lim_{\mathrm{P}=\mathrm{L},\ n=\infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho.$$

Dieser Satz heisse das Theorem T.

Der Grenzübergang, in welchem P die Lagen $P_1 \ldots P_n \ldots$ durchläuft, sei kurz der Grenzübergang G.

$u_n - \rho \cdot v_n$ sei $= w_n$. Dann ist

$$\lim_{P=L,\, n=\infty} \frac{w_n}{v_n} = 0.$$

Mithin ist auch

$$\lim_{P=L,\, n=\infty} \frac{|w_n|}{|v_n|} = 0.$$

Es sei τ irgend eine vorgegebene beliebig kleine endliche positive Zahl. Es lässt sich dann immer ein Index N und eine Lage Q von P angeben, so dass wenn $n > N$ und P beim Grenzübergang G die Lage Q passiert hat,

$$\left|\frac{w_n}{v_n}\right| < \frac{\tau}{2}, \text{ da ja nach Voraussetzung}$$

$$\lim_{P=L,\, n=\infty} \left|\frac{w_n}{v_n}\right| \textit{ gleichmässig } = 0.$$

Der Ausdruck

$$\Sigma_1^\infty |w_n| - \tau \cdot |v_n|$$

zerfällt in drei Teile A, B, C.

Im ersten Teile A stehen alle Glieder, deren Index $< N$. Derselbe ist immer kleiner als $\Sigma_1{}^N |w_n|$, also kleiner als eine angebbare endliche Grösse.

Im zweiten Teile B stehen alle Glieder

$$\Sigma |w_n| - \frac{\tau}{2} |v_n|,$$

deren Index $> N$. Derselbe ist für jede Lage von P jenseits Q negativ.

Der dritte Teil C ist $\Sigma - \frac{\tau}{2} |v_n|$ und nähert sich, da nach Voraussetzung die Reihe Σv_n dem Criterion K genügt, dem Werte $-\infty$.

Somit lässt sich eine Lage Q′ von P angeben, so dass beim Grenzübergang G bei einer Lage von P jenseits Q′

$$\Sigma_1^\infty |w_n| - \tau \cdot |v_n|$$

immerfort negativ bleibt. Daraus folgt dann, da τ eine beliebige Grösse war,

$$\lim_{P=L} \frac{\Sigma_1^\infty |w_n|}{\Sigma_1^\infty |v_n|} = 0\,;$$

also *a fortiori*

$$\lim_{P=L} \frac{\Sigma_1^\infty w_n}{\Sigma_1^\infty |v_n|} = 0.$$

Andererseits, da $\Sigma_1^\infty v_n$ dem Criterion K genügt, lässt sich eine endliche Zahl c finden, so dass beim Grenzübergang G gleichmässig

$$\Sigma v_n > c \,.\, \Sigma |v_n|.$$

Somit ist
$$\lim_{P=L} \frac{\Sigma_1^\infty w_n}{\Sigma_1^\infty v_n} = 0\,,$$

und daher
$$\lim_{P=L} \frac{\Sigma_1^\infty u_n}{\Sigma_1^\infty v_n} = \rho. \qquad \text{Q. e. d.}$$

Das Theorem T bleibt noch gültig, wenn die u_n in L selbst unendlich gross werden, nur muss dann das Criterion K durch ein anderes ergänzt werden, welches wir das Criterion K′ nennen mögen. Dasselbe besagt, dass, wenn η eine vorgegebene beliebig grosse Zahl sei, wenn ferner ein Index M gegeben sei, sich immer eine Lage R von P finden lasse, so dass beim Grenzübergang G jenseits R immerfort

$$\eta \,.\, (|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_M|) < |u_{M+1} + u_{M+2} + u_{M+3} + \ldots\ldots|.$$

Der Beweis ist dann ganz genau analog dem obigen, d.h., basiert darauf, dass bei beliebig vorgegebenem τ Σ_1^∞ $(|w_n| - \tau . |v_n|)$ schliesslich immerfort negativ wird.

Es ist klar, dass sich die obigen Bemerkungen ohne weiteres auf bestimmte Integrale zwischen positiven Grenzen und bei positiver Bahn erweitern lassen.

Auch für unendliche Producte existiert ein Theorem T. Sei

$$\Pi = (1 + u_1) \ldots (1 + u_2) \ldots (1 + u_n) \ldots$$

ein absolut convergentes Product innerhalb eines inneren Convergenzbereiches Sei $\mathfrak{G}$ die Convergenzgrenze, und sei der Grenzübergang G wie oben konstruiert. Die u_i erfüllen das Criterion K, und ausserdem sei noch

$$\lim_{n=\infty\; P=L} u_n \text{ gleichmässig} = 0.$$

Alsdann ist $\log \Pi = \Sigma \log (1 + u_n)$;

ferner
$$\lim_{n=\infty\; P=L} \frac{\log (1 + u_n)}{u_n} \text{ gleichmässig} = 1,$$

nach einer elementaren Eigenschaft der natürlichen Logaritmen, somit nach Theorem T

$$\lim_{P=L} \frac{\log \Pi}{\Sigma u_n} = 1\,.$$

7. Wir wollen nun auf einige nahe liegende Anwendungen des Theorems T näher eingehen.

Eine elementare Formel ist

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\lambda} = \Sigma_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\lambda)}\, x^n ;$$

ebenso

$$\log \frac{1}{1-x} = \Sigma_1^{\infty} \frac{x^n}{n} .$$

x nähere sich durch positive Werte wachsend der 1.

Es sei angesetzt $f(x) = \Sigma_0^{\infty} c_n x^n$ und der Convergenzradius der Potenzreihe sei $= 1$. Wir erhalten dann ohne weiteres

Satz I. Ist $\lim\limits_{n=\infty} c_n \,.\, n^{1-\lambda} = \rho$, so findet sich

$$\lim_{x=1} f(x) \,.\, (1-x)^{\lambda} = \rho \,.\, \Gamma(\lambda)$$

und für $\lambda = 0$

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \rho .$$

Satz I gilt auch noch für imaginäre λ, deren reeller Teil positiv ist. Er gilt auch noch, wenn x sich so der 1 nähert, dass sich durch 1 eine gerade Linie legen lässt, die mit der reellen Axe einen spitzen Winkel bildet, innerhalb welchem und dem Convergenzkreis x variiert.

Man kann nämlich nachweisen, dass dann das Criterion K befriedigt ist. Es sei $\lambda = \alpha + i\beta$ und α positiv. Alsdann ist identisch

$$\Sigma_0^{\infty} \left| \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+1)\,.\,\Gamma\lambda} \cdot x^n \right| = \left| \frac{1}{\Gamma\lambda} \right| \Sigma_0^{\infty} \frac{|\Gamma(n+\lambda)|}{\Gamma(n+1)} \cdot |x|^n .$$

Nun ist nach einer Eigenschaft der Γ Function

$$\lim_{n=\infty} n^{-\alpha+1} \cdot \frac{|\Gamma(n+\lambda)|}{\Gamma(n+1)} = 1 ;$$

somit nach dem evidenten Teil des Satzes I, wenn $|x|$ sich wachsend der Einheit nähert,

$$\lim_{|x|=1} (1-|x|)^{\alpha} \cdot \Sigma_0^{\infty} \frac{|\Gamma(n+\lambda)|}{\Gamma(n+1)} \cdot |x|^n = \Gamma(\alpha) .$$

Ist δ eine beliebig vorgegebene kleine Grösse, so lässt sich also nach obigem immer ein Wert ξ so nahe an 1 finden, dass für alle Lagen von x, für die $|x| > \xi$,

$$\Sigma_0^{\infty} \frac{|\Gamma(n+\lambda)|}{\Gamma(n+1)} \cdot |x|^n < \frac{\Gamma(\alpha)+\delta}{(1-|x|)^{\alpha}} .$$

Ist w der erwähnte spitze Winkel, so ist aus elementar geometrischen Gründen für alle Lagen von x

$$1 - |x| < \cos w \,.\, |1-x| ;$$

somit

$$\Sigma_0^{\infty} \frac{|\Gamma(n+\lambda)|}{\Gamma(n+1)} \cdot |x|^n < \frac{\Gamma(\alpha)+\delta}{(\cos w)^{\alpha}} \cdot \left| \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha} \right| .$$

Für alle Lagen x, welche überhaupt in Betracht kommen, übersteigt das Argument von $1 - x$ niemals einen gewissen endlichen Wert c^k; somit ist abgesehen von einem endlichen Factor $e^{k \cdot \beta}$ der Wert von

$$\left|\left(\frac{1}{1-x}\right)^\lambda\right|$$

identisch mit $\left|\left(\frac{1}{1-x}\right)^\alpha\right|$. Das Criterion K ist demnach in Kraft für die Reihe

$$\Sigma_0^\infty \frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+1)\,.\,\Gamma(\lambda)} \cdot x^n$$

unter den oben erwähnten Bedingungen, somit gilt auch das Theorem T unter denselben Bedingungen; *q.e.d.*

Satz I wurde von APPELL gefunden—'Comptes Rendus,' vol. 87 (Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances croissantes d'une variable)—jedoch mit der Einschränkung, dass λ positiv und kleiner als 1 sei und dass x auf der positiven Axe wachsend sich 1 nähere. Der Satz findet sich in der Appellschen Form auch bei PICARD, 'Traité d'Analyse,' Tome 1, p. 208, 209, 210 aus dem Jahre 1891.

Satz II. Es sei $f(x)$ wiederum $= \Sigma_0^\infty\ c_n \,.\, x^n$.

Es ist dann identisch

$$\frac{f(x)}{1-x} = \Sigma_0^\infty (c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n)\, x^n.$$

Indem wir auf $\frac{f(x)}{1-x}$ Satz I anwenden, erhalten wir Satz II. Derselbe lautet also: Sind die Coefficienten einer Potenzreihe $\Sigma_0^\infty\ c_n \,.\, x^n$ derart beschaffen, dass

$$\lim\ n^{-\lambda}(c_0 + c_1 + \ldots + c_n) = \rho,$$

so ist

$$\lim_{x=1} f(x) \,.\, (1-x)^\lambda = \rho \,.\, \Gamma(\lambda+1).$$

Dabei nähert sich x dem Punkte 1 auf die nämliche Weise wie im Satze I, und λ ist eine complexe Zahl, deren reeller Teil grösser als -1.

Für $\lambda = 0$ ergiebt sich der Abelsche Satz, für $\lambda = 1$ der Satz von FROBENIUS (Über die Leibnitzsche Reihe, 'Crelle,' Bd. 89, Jahr 1880). Auch die Sätze von HÖLDER, 'Math. Annalen,' Jahr 1882 (Über Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgrenze) ergeben sich leicht als Specialfälle des obigen durch mehrfache Ausführung der Division durch $1 - x$. Satz II findet sich für den Fall, dass x auf der positiven Axe wachsend sich 1 annähert, im Aufsatz von FRANEL, 'Math. Annalen,' Bd. 52, Jahr 1899.

Wenn im Satz II $\lambda = -1$, so findet sich

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{(1-x)\log\frac{1}{1-x}} = \rho.$$

Satz III. Es sei wiederum wie im Satz I

$$f(x) = \Sigma_0^\infty c_n x^n$$

und $$\lim c_n \, . \, n^{1-\lambda} = \rho$$

$$\lambda = \alpha + \beta i,$$

wobei α eine negative Grösse $= -\gamma$.

Die kleinste ganze Zahl grösser als γ sei h.

Alsdann convergieren nach bekannten Criterien die Reihen $\Sigma_0^\infty c_n$, $\Sigma_0^\infty n \, . \, c_n$, $\Sigma_0^\infty n\,(n-1)\,c_n \; . \; . \; . \; \Sigma_0^\infty n\,(n-1) \; . \; . \; . \; (n-h+1)\,c_n$, welche wir beziehungsweise mit $f(1), f'(1), f''(1) \; . \; . \; . \; f^{(h-1)}_{(1)}$ bezeichnen wollen.

Satz III sagt dann aus, es sei

$$f(x) = f(1) + f'(1) \, . \, (x-1) + \frac{f''(1)}{2\,!} \, . \, (x-1)^2 + \; . \; . \; . \; + \frac{f^{(h-1)}_{(1)}}{(h-1)\,!} \, . \, (x-1)^{h-1}$$
$$+ \rho \, . \, (1-x)^{-\lambda} \, . \, \psi(x),$$

wo $$\lim_{x=1} \psi(x) = \Gamma(\lambda).$$

Der Beweis beruht auf folgendem Hülfssatze:

Ist $a_1, a_2, \; . \; . \; . \; a_n \; . \; . \; .$ eine Folge derart, dass

$$\lim_{n=\infty} a_n \, . \, n^\mu = \rho,$$

wo μ eine complexe Zahl, deren reeller Teil positiv und grösser als 1 ist, so dass also

$$a_1 + a_2 + \; . \; . \; . \; + a_n + \; . \; . \; . \; \text{convergiert},$$

so ist $$\lim_{m=\infty} (a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \; . \; . \; .)\, n^{\mu-1} = \frac{\rho}{\mu-1}.$$

In der That, es sei

$$a_n = \frac{\rho}{\mu-1}(n^{-\mu+1} - (n+1)^{-\mu+1}) + b_n,$$

also $\lim\limits_{n=\infty} b_n \, . \, n^{\mu'} = 0$, wo μ' der reelle Teil von μ.

Es ist für jedes vorgegebene δ möglich einen Index N zu finden, so dass für $n > \mathrm{N}$

$$|b_n| < \delta(n^{-\mu'+1} - (n-1)^{-\mu'+1}).$$

Wählen wir $m > \mathrm{N}$, so ist also

$$b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \; . \; . \; . \; < |b_m| + |b_{m+1}| + \; . \; . \; . \; < \delta \, . \, m^{-\mu'+1}$$

Daher muss sein

$$\lim_{m=\infty} (b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \; . \; . \; .) \, . \, m^{\mu-1} = 0\,;$$

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \; . \; . \; . \; \text{ist aber identisch}$$

$$= \frac{\rho}{\mu-1} \, . \, m^{-\mu+1} + b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \; . \; . \; .$$

Der Hülfssatz ist somit erwiesen.

Nun wenden wir uns zum Beweis des Satzes III.

Es war
$$f(x) = \Sigma_0^\infty c_n x^n \text{ und}$$
$$c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots = f(1).$$

Wir bilden
$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \Sigma_1^\infty (c_n + c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots) x^{n-1};$$

$c_n + c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots$ setzen wir $= c'_n$. Da nun $\lim\limits_{n=\infty} c_n \cdot n^{1-\lambda} = \rho$ war, so ist nach dem Hülfssatz

$$\lim_{n=\infty} c'_n \cdot n^{-\lambda} = \frac{\rho}{-\lambda}.$$

Somit können wir diese Reihe genau so behandeln, wie die ursprüngliche Reihe; und es ist unschwer zu sehen, dass sich dies Verfahren fortsetzen lässt, so lange als die Summe der Coefficienten der neu gebildeten Reihen convergiert, d. h. h mal. Schliesslich erhalten wir auf der rechten Seite eine Reihe, deren Coefficienten ϕ_n der Bedingung genügen

$$\lim_{n=\infty} \phi_n \cdot n^{-h+1-\lambda} = \frac{\rho}{-\lambda \cdot (-\lambda - 1)(-\lambda - 2) \ldots (-\lambda + 1 - h)}.$$

Für die dazugehörige Reihe $\mathrm{F}(x) = \Sigma_0^\infty \phi_n x^n$ gilt aber nach Satz I

$$\lim_{x=1} \mathrm{F}(x) \cdot (1 - x)^{h+\lambda} = \frac{\rho}{-\lambda \cdot (-\lambda - 1) \ldots (-\lambda + 1 - h)} \cdot \Gamma(h + \lambda).$$

Nach dem bekannten Functionaltheorem der Γ-Function; und wenn man berücksichtigt, dass

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\dfrac{\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} - f'(1)}{x - 1} - \dfrac{f''(1)}{2!}}{x - 1} - \text{etc. } (h \text{ mal}),$$

ergiebt sich dann rein aritmetisch die oben gegebene Form des Satzes III.

Für den Fall, dass γ eine ganze Zahl ist und der imaginäre Teil von λ von 0 verschieden ist, hören unsere Beweise auf gültig zu sein, und wir lassen es dahingestellt, was dann eintreten mag. Ist aber λ selbst eine ganze Zahl, so tritt offenbar die logaritmische Modification des Satzes I in Kraft und alles andere bleibt unverändert.

8. Einige kurze Andeutungen, wie man die Sätze I, II, and III ausbeuten mag, mögen hier nicht am unrechten Platze sein.

Es sei etwa angesetzt

$$f(x) = \Sigma_0^\infty x^n \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha) \cdot \Gamma(n+\beta) \cdot \Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+\delta) \cdot \Gamma(n+\epsilon) \cdot \Gamma(n+\zeta)}.$$

Alsdann genügt $f(x)$ offenbar einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten. Der Punkt $x = 1$ ist ein singulärer Punkt derselben. Fragt man nach der Fortsetzung des Integrals $f(x)$ beim Punkte $x = 1$, so lässt die Fuchssche Theorie noch die Frage nach dem Werte einiger Coefficienten offen, die gerade durch Sätze I und III in befriedigender Weise gelöst wird.

Oder sei angesetzt

$$f(x) = \Sigma_0^\infty x^{n^2}$$

und fragen wir nach dem asymptotischen Verhalten der Function, wenn x sich geradlinig vom Nullpunkt einem Punkte j des Convergenzkreises nähert. Ist $j = 1$, so sagt uns Satz II ohne weiteres, dass

$$\lim_{x=1} f(x) \cdot \sqrt{1-x} = \Gamma(3/2).$$

Ist $j = -1$, so setzen wir $x = -x'$ und lassen x' sich der positiven Einheit nähern. Es ist dann

$$\mathrm{F}(x') = f(-x') = \Sigma_0^\infty x'^{4n^2} - \Sigma_0^\infty x'^{(2n+1)^2},$$

$$\frac{\mathrm{F}(x')}{1-x'} = \Sigma_0^\infty x'^{4n^2}(1 + x' + \ldots + x'^{4n}), \text{ also}$$

$$\Sigma_0^\infty (4n+1)\, x'^{4n^2} > \frac{\mathrm{F}(x')}{1-x'} > \Sigma_0^\infty (4n+1) x'^{4n^2+4n}.$$

Nach Satz II ist aber

$$\lim_{x'=1} (1-x') \cdot \Sigma(4n+1) \cdot x'^{4n^2} = \tfrac{1}{2}$$

und ebenso

$$\lim_{x'=1} (1-x') \cdot \Sigma(4n+1) \cdot x'^{4n^2+4n} = \tfrac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\lim_{x=-1} f(x) = \tfrac{1}{2}.$$

Es sei $j = e^{2\pi i \cdot \tau}$ und $\tau = a/b$ eine rationale Zahl, insbesondere b eine ungerade Primzahl. Alsdann führt ein Verfahren zum Ziel, welches wir für den besonderen Fall $b = 5$, $a = 1$ durchführen werden. Wir setzen wiederum

$$x = j \cdot x'$$

und lassen x' sich positiv wachsend der Einheit nähern. Es ist identisch

$$f(x) = \Sigma_0^\infty x'^{(5n)^2} + j \cdot \Sigma_0^\infty x'^{(5n+1)^2} + x'^{(5n+4)^2}$$
$$+ j^4 \cdot \Sigma_0^\infty x'^{(5n+2)^2} + x'^{(5n+3)^2}.$$

Nun ist nach Satz II

$$\lim_{x'=1} \Sigma_0^\infty x'^{(5n)^2} \cdot \sqrt{1-x'} = \tfrac{1}{5} \cdot \Gamma 3/2\,,$$

$$\lim_{x'=1} \left(\Sigma_0^\infty x'^{(5n+1)^2} + x'^{(5n+4)^2}\right) \cdot \sqrt{1-x'} = \tfrac{2}{5} \cdot \Gamma 3/2\,,$$

$$\lim_{x'=1} \left(\Sigma_0^\infty x'^{(5n+2)^2} + x'^{(5n+3)^2}\right) \cdot \sqrt{1-x'} = \tfrac{2}{5} \cdot \Gamma 3/2\,.$$

Daraus ergiebt sich

$$\lim_{x'=1} f(x) \cdot \sqrt{1-x'} = \tfrac{1}{5} \cdot \Gamma 3/2 (1 + 2j + 2j^4)\,,$$

$$\lim_{x=j} f(x) \cdot \sqrt{j-x} = \sqrt{j} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot \Gamma 3/2 \cdot (1 + 2j + 2j^4)\,.$$

Diese Schlussweise ist ganz allgemein. Es geht aus diesem asymptotischen Gesetz ohne weiteres hervor, dass die singulären Punkte der Function unendlich dicht auf dem Convergenzkreise liegen, dass derselbe also eine natürliche Grenze der Reihe bildet.

9. Es sei $\phi(1), \phi(2) \ldots \phi(n) \ldots$ eine Folge, derart dass

$$\phi(1) + \phi(2) + \ldots + \phi(n) + \ldots\ldots$$

in einem Grenzpunkte der Convergenz L beim Grenzübergang G das Criterion K erfüllt. Ferner sei $\phi(u)$ eine Function der reellen positiven Veränderlichen u, derart dass $\lim\limits_{\mathrm{P}=\mathrm{L}\ u=\infty} \dfrac{\phi(u+h)}{\phi(u)} = 1$ beim Grenzübergang G, und zwar in gleichmässiger Weise. Diese Grenzbeziehung soll Geltung haben für *jeden* endlichen positiven Wert von $h \leqq 1$. Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\lim_{\mathrm{P}=\mathrm{L}} \frac{\phi(1) + \phi(2) + \ldots + \phi(n) + \ldots\ldots}{\int_1^\infty \phi(u)\, du} = 1\,.$$

Dies ist eine unmittelbare Folge des Theorems T. Es ist nämlich identisch

$$\int_1^\infty \phi(u)\, du = \int_1^2 \phi(u)\, du + \int_2^3 \phi(u)\, du \ldots + \int_n^{n+1} \phi(u)\, du + \ldots$$

Ferner ist $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\phi(u) - \phi(n)}{\phi(n)}\, du$, infolge der Grenzbeziehung $\lim\limits_{n=\infty\ \mathrm{P}=\mathrm{L}} \dfrac{\phi(u+h)}{\phi(u)} = 1$, für genügend grosse Werte von u und Lagen von P genügend nahe an L, kleiner als δ, wie klein δ auch sei. Somit ist

$$\lim_{n=\infty\ \mathrm{P}=\mathrm{L}} \frac{\int_n^{n+1} \phi(u)\, du}{\phi(n)} = 1$$

in gleichmässiger Weise, also folgt nach Theorem T die Behauptung.

Ein ganz analoger Satz gilt offenbar auch für mehrfache Summen und mehrfache Integrale.

Die Voraussetzung, dass $\phi(1) + \phi(2) + \ldots + \phi(n) + \ldots$ bei $\lim P = L$ das Criterion K erfülle, kann auch durch die andere ersetzt werden, dass

$$\Sigma_1^\infty \int_n^{n+1} \phi(u)\, du$$

das Criterion K erfülle, d. h., dass sich eine Constante c finden lasse, so dass gleichmässig

$$\left| \int_1^\infty \phi(u)\, du \right| > c \, . \int_1^\infty |\phi(u)|\, du \, .$$

10. Der Satz 9 ist für die wirkliche Berechnung von Grenzwerten sehr dienlich, da das Rechnen mit bestimmten Integralen viel einfacher ist als das Rechnen mit Reihen.

Es sei z. B. x eine positive reelle Veränderliche und angesetzt $f(x) = \Sigma_1^\infty \dfrac{1}{x + n^\lambda}$ $\lambda > 1$. Der Grenzübergang G bestehe darin, dass x unendlich gross wird. Es ist das asymptotische Verhalten von $f(x)$ zu untersuchen.

$\lim\limits_{x=\infty} f(x)$ ist offenbar $= 0$, jedoch $\lim\limits_{x=\infty} x \, . \, f(x) = \infty$, da es dem Criterion K genügt. Das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x}{x + u^\lambda} \cdot du$$

ist nun leicht zu finden, wenn man

$$u^\lambda = x \, . \, v^\lambda \text{ setzt,}$$

wobei weder Integrationsbahn noch Grenzen geändert werden. Dasselbe ist augenscheinlich

$$= \int_0^\infty \frac{x^{1+1/\lambda}\, dv}{x + x \, . \, v^\lambda} = x^{\frac{1}{\lambda}} \int_0^\infty \frac{dv}{1 + v^\lambda} \, .$$

Somit ist nach dem Satz des Art. 9

$$\lim_{x=\infty} x^{1-1/\lambda} \, . \, f(x) = \int_0^\infty \frac{dv}{1 + v^\lambda} \, .$$

11. Eine Folge von Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$, für welche

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha_0} \log n^{\alpha_1} \log\log n^{\alpha_2} \ldots \log\log\log (h \text{ mal})\, n^{\alpha_h}} = 1$$

bei irgendwelchen Werten der α, gehöre zum *Bonnetschen Typus* $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_h]$. Eine Folge des Typus $[-1, -1, -1 \ldots (k+1 \text{ mal})]$ sei kurz $L_{k+1}^{(n)}$.

Im Zusammenhang hiermit stellen wir nun gewisse Sätze auf.

Satz IV. Ist $c_n = \rho\,[\alpha_0, \alpha_1 \;.\;.\;.\;.\; \alpha_k]$ und ist

$$\alpha_0 > -1\,,$$

ferner $f(x) = \Sigma_0^\infty\, c_n \,.\, x^n$, so findet sich

$$\lim_{x=1} f(x)\,.\,(1-x)^{\alpha_0+1}\,.\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^{-\alpha_1}.\left(\log\log\frac{1}{1-x}\right)^{-\alpha_2}\;.\;.\;.\; = \rho\,.\,\Gamma(1+\alpha_0)\,.$$

Ist jedoch $\alpha_0 = -1$ und α_{k+1} die erste der Zahlen α, welche von -1 verschieden ist, so ist

$$\lim_{x=1} f(x)\,.\left(\log\log\;.\;.\;.\;(k+1\text{ mal})\,\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha_{k+1}+1}.\left(\log\;.\;.\;.\;(k+2\text{ mal})\,\frac{1}{1-x}\right)^{\alpha_{k+2}}\;.\;.\;.$$
$$= \frac{\rho}{\alpha_{k+1}+1}\,.$$

Dabei nähert sich x durch positive reelle Werte wachsend der Einheit.

Der Beweis beruht auf der Aussage des Art. 9. $f(x)$ lässt sich daraufhin seinem asymptotischen Verhalten nach studieren durch Betrachtung des Integrals

$$\int_c^\infty u^{\alpha_0}(\log u)^{\alpha_1}(\log\log u)^{\alpha_2}\;.\;.\;.\;(\log\log\,(h\text{ mal})\,u)^{\alpha_h}\,.\,x^u\,du\,,$$

wobei die untere Grenze des Integrals irgend eine passend gewählte endliche Constante, die Bahn die positive Axe der u ist.

$x^u = e^{u\,.\,\log x}$, $\log x = -\dfrac{1}{p}$. Wir ersetzen u durch pv. Das Integral wird dann

$$\int_{\frac{c}{p}}^\infty e^{-v}\,.\,(p\,.\,v)^{\alpha_0}\,.\,(\log pv)^{\alpha_1}(\log\log pv)^{\alpha_2}\;.\;.\;.\;p\,.\,dv\,.$$

Wir betrachten sein asymptotisches Verhalten, wenn p durch positive reelle Werte über alle Grenzen wächst.

Das Integral ist identisch

$$= p^{\alpha_0+1}(\log p)^{\alpha_1}(\log\log p)^{\alpha_2}\;.\;.\;.\;\mathrm{I},$$

wo
$$\mathrm{I} = \int_{\frac{c}{p}}^\infty e^{-v}\,.\,v^{\alpha_0}\,.\left(\frac{\log pv}{\log p}\right)^{\alpha_1}.\left(\frac{\log\log pv}{\log\log p}\right)^{\alpha_2}\;.\;.\;.\;dv\,.$$

Es ist identisch $\dfrac{\log p\,.\,v}{\log p} = 1 + \dfrac{\log v}{\log p}$. Ferner ist $\dfrac{\log\log pv}{\log\log p} < 1 + \dfrac{\log\log v}{\log\log p}$, wenn p und v genügend gross gewählt sind, nämlich so, dass $\log p > 2$ und $\log v > 2$, da dann

$$\log p + \log v < \log p\,.\,\log v,\ \text{also}$$
$$\log\log(p\,.\,v) < \log\log p + \log\log v\,.$$

Überhaupt findet man leicht, dass bei genügend grossen Werten von p und v

$$\frac{\log\log\ .\ .\ .\ (h\,\text{mal})\,p\,.\,v}{\log\log\ .\ .\ .\ (h\,\text{mal})\,p} < 1 + \frac{\log\log\ .\ .\ .\ (h\,\text{mal})\,v}{\log\log\ .\ .\ .\ (h\,\text{mal})\,p}.$$

Somit ist für beliebige Werte von $\alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .\ .$

$$\left|\left(\frac{\log\log\ .\ .\ .\ (h\,\text{mal})\,p\,.\,v}{\log\log\ .\ .\ .\ (h\,\text{mal})\,p}\right)^{\alpha_h}\right|$$

immer zwischen 1 und

$$\left|\left(1 + \frac{\log\log\ .\ .\ .\ (h\,\text{mal})\,v}{\log\log\ .\ .\ .\ (h\,\text{mal})\,p}\right)^{\alpha_h}\right|$$

gelegen, wenn nur p und v genügend gross gewählt sind.

Das Integral

$$\mathrm{I} = \int_{\frac{c}{p}}^{\infty} \left|e^{-v}\right| .\ \left|v^{\alpha_0}\right| . \left|\left(1 + \frac{\log v}{\log p}\right)^{\alpha_1}\right| . \left|\left(1 + \frac{\log\log v}{\log\log p}\right)^{\alpha_2}\right|\ .\ .\ .\ dv$$

ist aber *in* $p = \infty$ convergent. Die bereits erwähnte specielle Form des Criterion der Gleichmässigkeit der Convergenz trifft nun nach obigen Ungleichungen hier zu.

Es ist daher

$$\lim_{p=\infty} \mathrm{I} = \int_0^{\infty} e^{-v}\,.\,v^{\alpha_0}\,dv = \Gamma(1+\alpha_0)$$

für irgendwelche Werte der α, vorausgesetzt nur, dass der reelle Teil von α_0 grösser ist als -1.

Ist andererseits $\alpha_0 = -1,\ \alpha_1 = -1\ .\ .\ .\ .\ \alpha_k = -1$, und α_{k+1} von -1 verschieden, so verfahren wir wie folgt.

$$\frac{f(x)}{1-x} \text{ ist } = \Sigma_0^{\infty}(c_0 + c_1 + \ .\ .\ .\ + c_n)\,x^n.$$

Durch ein Verfahren, welches dem im Hülfssatz von Satz III angewandten parallel läuft, beweisen wir leicht, dass die Folge $c'_n = c_0 + c_1 + \ .\ .\ .\ + c_n$ zu dem Bonnet-schen Typus $[0,\ 0,\ \underset{(k+1)\,\text{mal}}{0\ .\ .\ .}\ ,\ \alpha_{k+1} + 1,\ \alpha_{k+2}\ .\ .\ .\ \alpha_h]$ gehört, genauer das $\frac{1}{\alpha_{k+1}+1}$-fache einer Folge dieses Typus ist. Dieser Fall ist somit auf den ersten Fall reducierbar.

Damit ist im wesentlichen der Beweis vollendet. $-\frac{1}{p}$ war $= \log\ x$. Da x sich wachsend der Einheit nähert, ist $\lim\limits_{x=1} \frac{\log x}{1-x} = -1$. Also ist p durch $\frac{1}{1-x}$ zu ersetzen und man braucht nur noch Theorem T anzuwenden, um die Behauptung zu erschliessen.

Das Analogon der Sätze II und III ist offenbar auch im hier erörterten weiteren Sinne möglich.

Satz V. Es sei a_n eine Folge positiver Grössen, welche immerfort wachsen, derart dass $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$.

Es sei ferner a_n ein Bonnetscher Typus

$$a_n = [0, 0, 0 \underset{m+1 \text{ mal}}{\ldots} \alpha, \beta, \gamma \ldots \delta]$$

$$\alpha > 1$$

und

$$F(x) = \Sigma_1^\infty \frac{L_{m+1}(n)}{x + a_n}.$$

Wir wollen das asymptotische Verhalten von $F(x)$ untersuchen, wenn x durch positive reelle Werte über alle Grenzen wächst.

$xF(x) = \Sigma_1^\infty \frac{x. L_{m+1}(n)}{x + a^n}$ genügt beim Grenzübergang $x = \infty$ offenbar dem Criterion K. Somit können wir die Summe durch das Integral ersetzen

$$\int_c^\infty \frac{xdu}{u \log u \log\log u \ldots \log\log (m \text{ mal})\, u \,.\, x + \phi(u)},$$

wo c eine geeignet gewählte Constante und $\phi(u) = (\log\log \ldots (m+1 \text{ mal})\ u)^\alpha$ $(\log \log \ldots (m+2 \text{ mal})\ u)^\beta \ldots$ ist. Nun ist $du\ L_{m+1}(u)$ offenbar das Differential von $\log\log \ldots (m+1 \text{ mal})\ (u)$. Das letztere ersetzen wir durch v; alsdann wird das Integral

$$\int_{c'}^\infty \frac{xdv}{x + v^\alpha . (\log v)^\beta . (\log\log v)^\gamma \ldots},$$

wo c' wiederum eine geeignet gewählte Constante.

Den Ausdruck $v^\alpha\ (\log\ v)^\beta\ (\log\ \log\ v)^\gamma \ldots$ setzen wir $= w$, also $dw = w\ (\alpha \frac{dv}{v} + \beta \frac{dv}{v \,.\, \log v} + \gamma \,.\, \frac{dv}{v \,.\, \log v \log\log v} + \ldots\ldots)$. Das Integral

$$\int^\infty \frac{xvdw}{w\,(x + w)} \text{ ist } = \alpha \int^\infty \frac{dv}{x + w} + \beta \int^\infty \frac{dv}{\log v (x + w} +$$

Mithin ist nach Theorem T

$$\lim_{x=\infty} \frac{\int^\infty \frac{x \,.\, v \,.\, dw}{w(x + w)}}{\int^\infty \frac{dv}{x + w}} = \alpha.$$

Es bleibt uns noch das Integral

$$\int^\infty \frac{x \,.\, v \,.\, dw}{w\,(x + w)}$$

zu betrachten. Nach Theorem T können wir für v hier seinen asymptotischen Wert setzen. Da aber

$$v^{\alpha}(\log v)^{\beta}(\log\log v)^{\gamma}\ldots = w,$$

so ist für $w = \infty$ asymptotisch

$$v = \zeta\,.\,w^{\alpha'}(\log w)^{\beta'}(\log\log w)^{\gamma'}\ldots, \qquad \text{wo}$$

$$\alpha\alpha' = 1, \quad \alpha\beta' + \beta = 0, \quad \alpha\gamma' + \gamma = 0, \ldots \alpha\delta' + \delta = 0$$

und

$$\zeta^{\alpha}\,.\,\alpha'^{\beta} = 1, \quad \text{d. h. } \zeta^{\alpha} = \alpha^{\beta}.$$

Somit kommen wir auf das Studium eines Integrals

$$\zeta\,.\int^{\infty}\frac{x\,.\,w^{\frac{1}{\alpha}-1}\,.\,(\log w)^{\beta'}\,.\,(\log\log w)^{\gamma'}}{x+w}\ldots dw\,.$$

In demselben ersetzen wir w durch $x\,.\,t^{\alpha}$.
Es ist dann das Integral

$$\mathrm{I} = \alpha\,.\,\zeta\,.\,x^{\frac{1}{\alpha}}\,.\int^{\infty}\frac{(\log x\,.\,t^{\alpha})^{\beta}\,.\,(\log\log x\,.\,t^{\alpha})^{\gamma'}\ldots dt}{1+t^{\alpha}}.$$

Dieses behandeln wir genau so wie das entsprechende Integral im Satz IV. Man findet somit als ersten Term seiner asymptotischen Entwickelung

$$\mathrm{I} \equiv \alpha\,.\,\zeta\,.\,x^{\frac{1}{\alpha}}\,.\,(\log x)^{\beta'}\,.\,(\log\log x)^{\gamma'}\ldots\alpha^{\beta'}\,.\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^{\alpha}}\,.$$

ζ war $= \alpha^{\frac{\beta}{\alpha}} = \alpha^{-\beta'}$. Somit kommt

$$\mathrm{I} \equiv \alpha\,.\,x^{\frac{1}{\alpha}}\,.\,(\log x)^{\beta'}\,.\,(\log\log x)^{\gamma'}\ldots\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^{\alpha}}\,.$$

Es war aber $\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{\mathrm{I}}{x\,.\,\mathrm{F}(x)} = \alpha$. Also ist schliesslich

$$\lim_{x=\infty} x^{1-\frac{1}{\alpha}}\,.\,(\log x)^{\frac{\beta}{\alpha}}\,.\,(\log\log x)^{\frac{\gamma}{\alpha}}\ldots\ \mathrm{F}(x) = \int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^{\alpha}}.$$

Um das Verfahren zu beschreiben, welches im Falle $\alpha = 1$ zum Ziele führt, genügt es, ein concretes Beispiel zu betrachten. Es sei angesetzt

$$\mathrm{F}(x) = \Sigma_2^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\beta}\,.\,(x+n)}$$

und $\beta > 1$. Dies führt uns zur Untersuchung des Integrals

$$\int_c^{\infty}\frac{du}{(\log u)^{\beta}\,.\,(x+u)}.$$

Dasselbe ist identisch

$$= -\frac{1}{\beta - 1}\int_c^\infty \frac{u \, . \, d\,(\log u)^{1-\beta}}{x + u}.$$

Es ist nun nach der Formel der partiellen Integration

$$-\int_c^\infty \frac{u}{x+u} \, . \, d\,(\log u)^{1-\beta} + (\log u)^{1-\beta} \, . \, d\,\frac{u}{x+u} = \frac{c}{x+c} \, . \, (\log c)^{1-\beta}.$$

Diese Formel gilt für alle Werte von x. Gehen wir jetzt zur Grenze $\lim x = \infty$ über, so kann man, da

$$\lim_{x=\infty} x \, . \, \mathrm{F}(x) = \infty,$$

die rechte Seite der obigen Identität ausser Spiel lassen. Der asymptotische Ausdruck von $\mathrm{F}(x)$ wird somit

$$\frac{1}{\beta - 1}\int_c^\infty x\,(\log u)^{1-\beta} \frac{du}{(x+u)^2}.$$

Ersetzen wir hier u durch $x \, . \, v$ und gehen wir dann zur Grenze $x = \infty$ über, so wird nach dem früheren Verfahren gezeigt, dass der Ausdruck asymptotisch

$$\equiv \frac{1}{\beta - 1}(\log x)^{1-\beta}\int_0^\infty \frac{dv}{(1+v)^2} \qquad \equiv \frac{1}{\beta - 1} \, . \, (\log x)^{1-\beta}.$$

Somit ist

$$\lim_{x=\infty} \mathrm{F}(x) \, . \, (\log x)^{\beta - 1} = \frac{1}{\beta - 1}.$$

Danach lautet der Satz V wie folgt:

Es sei $\mathrm{L}_{m+1}(n)$ irgend ein Bonnetscher Typus $[\underbrace{-1, -1, -1 \ldots -1}_{m+1 \text{ mal}}]$ und a_n ein Bonnetscher Typus $[\underbrace{0, 0, 0 \ldots 0}_{m+1 \text{ mal}}, \alpha, \beta, \gamma \ldots \delta]$, derart dass $\Sigma_1^\infty \frac{\mathrm{L}_{m+1}(n)}{a_n}$ absolut convergiert. Es sei angesetzt

$$\mathrm{F}(x) = \Sigma_1^\infty \frac{\mathrm{L}_{m+1}(n)}{x + a_n}.$$

Ist dann $\alpha > 1$, so findet sich

$$\lim_{x=\infty} x^{1-\frac{1}{\alpha}} \, . \, (\log x)^{\frac{\beta}{\alpha}} (\log\log x)^{\frac{\gamma}{\alpha}} \ldots \mathrm{F}(x) = \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^\alpha}.$$

Ist jedoch $\alpha = 1$, $\beta = 1 \ldots$ und ϵ die erste dieser Grössen, die von 1 verschieden ist, so findet sich

$$\lim_{x=\infty} (\log\log \ldots x)^{\epsilon - 1} \, . \, (\log\log \ldots x)^{\eta} \, . \, (\log\log \ldots x)^{\zeta} \ldots (\log\log \ldots x)^{\delta} \, . \, \mathrm{F}(x) = \frac{1}{\epsilon - 1},$$

wo nun η, ζ . . . δ die auf ϵ folgenden Werte der obigen Zahlenreihe bedeuten. Dabei ist der Logaritme so oft iteriert als der Platz des dazugehörigen Buchstaben (ϵ, η, ζ . . . δ) in der Zahlenreihe α, β, γ . . . δ anzeigt, wobei von α mit 0 zu zählen angefangen wird.

12. Aus dem Satze V kann man leicht Folgerungen ziehen, welche für die Theorie der ganzen (transcendenten) Functionen nicht ohne Interesse sind. Einzelne, doch nicht alle, der folgenden Resultate sind anticipiert von verschiedenen Autoren, hauptsächlich Laguerre, Poincaré, Hadamard, Borel, von Schaper. Man findet eine sehr eingehende Besprechung der Literatur des Gegenstandes in Borel's 'Leçons sur la Théorie des Fonctions entières,' 1900.

Es sei r_1, r_2 . . . r_n . . . eine Folge immerfort wachsender positiver Grössen, derart dass $\lim\limits_{n=\infty} r_n = \infty$. Hat die Reihe

$$r_1^x + r_2^x + r_3^x + \ldots$$

einen inneren Convergenzbereich, so werden wir sagen, dass die Folge r_n zur Bonnetschen Classe 1 gehört. Hat diese Reihe keinen Convergenzbereich, jedoch die andere

$$\Sigma_1^\infty n^{-1} \,.\, r_n^x,$$

so gehört die Folge zur Bonnetschen Classe 2. Hat auch diese Reihe keinen Convergenzbereich, jedoch

$$\Sigma_3^\infty n^{-1} \,.\, (\log n)^{-1} r_n^x,$$

so gehört die Folge zur Bonnetschen Classe 3, u. s. f.

Die Reihen convergieren nur für complexe Werte von x, deren reeller Teil negativ ist. Die reelle Convergenzgrenze der Reihe $r_1^x + r_2^x + \ldots$ hat von Schaper *Convergenzexponent*, Borel *Ordnung*, genannt. Wir wollen beide Namen benutzen.

Es sei a_1, a_2, a_3 . . . a_n . . . eine Folge complexer Zahlen, deren Moduln $|a_n| = r_n$ immerfort wachsen, so dass $\lim\limits_{n=\infty} r_n = \infty$. Alsdann kann man beliebig viele ganze Functionen bilden, die nur in den a_i, und zwar dort einfach, verschwinden. Dazu kann man die Metode von Weierstrass benutzen, oder auch wie folgt verfahren. Man bestimmt irgend eine Folge ganzer Functionen von x

$$g_1(x),\; g_2(x),\; g_3(x) \;\ldots\; g_n(x) \;\ldots$$

derart, dass

$$\Sigma_1^\infty \frac{g_n(x)}{g_n(a_n) \,.\, a_n}$$

für jeden Wert von x absolut und gleichmässig convergiert, und setzt dann

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \Sigma_1^\infty \frac{g_n(x)}{g_n(a_n) \,.\, (x - a_n)}.$$

Diese Differentialgleichung definiert offenbar eine ganze Function G (x), welche die gestellte Forderung erfüllt. Das Integral der Gleichung erhält man in der Form

$$G(x) = G(o) \,.\, \Pi_1^\infty \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\int_0^x \frac{g_n(x) - g_n(a_n)}{x - a_n} dx},$$

denn dieses Product ist absolut und gleichmässig convergent. Das letztere zeigt sich sehr leicht wie folgt. Da $\Sigma_1^\infty \frac{g_n(x)}{g_n(a_n) \cdot a_n}$ absolut und gleichmässig für jeden endlichen Wert von x convergiert, so auch

$$\Sigma_1^\infty \frac{g_n(x)}{g_n(a_n) \cdot (x - a_n)}$$

mit Ausnahme der Pole. Ist x_0 ein gegebener Wert und B irgend ein endlicher gegebener Bereich, der 0 und x_0 einschliesst, ist ferner eine kleine Zahl δ vorgegeben, so können wir einen Index m' bestimmen, so dass

$$\Sigma_m^{m+p} \left| \frac{g_n(x)}{g_n(a_n)(x - a_n)} \right| < \delta,$$

wie gross auch p sei, wenn nur x in B gelegen ist und $m \geq m'$ ist.

Somit ist

$$\Sigma_m^{m+p} \left| \int_0^{x_0} \frac{g_n(x)}{g_n(a_n) \cdot (x - a_n)} dx \right| < \delta \cdot |x_0|.$$

Diese Ungleichung schliesst aber die absolute und gleichmässige Convergenz des obigen Productes in sich ein.

Wenn nun die $g_1(x) \ldots g_n(x) \ldots$ in zweckmässiger Weise gewählt sind, so erhalten wir ganze Functionen G (x), welche mannigfache interessante und wichtige Eigenschaften besitzen.

13. Ein Satz von Schou ('Comptes Rendus,' t. CXXV, p. 763) besagt folgendes: Ist der Modul einer ganzen Function G (x), wenn $|x| = r$ ist, kleiner als $e^{V(r)}$, so ist die Anzahl N der Wurzeln von G $(x) = 0$, deren Modul kleiner ist als r

$$N < \frac{V(s \cdot r)}{\log(s - 1)},$$

wo s irgend eine Zahl grösser als 2 bedeutet.*

Ist V $(r) = r$ für irgend einen endlichen Wert von α, so heisst G (x) nach Laguerre eine ganze Function eines endlichen genre und nach v. Schaper eine Hadamardsche Function. Ist V $(r) = e^{r^\alpha}$, so wollen wir G (x) eine Borelsche Function 2^{ter} Classe nennen. Ist V $(r) = e^{e^{r^\alpha}}$, so heisse G (x) eine Borelsche Function dritter Classe, u. s. f. Die Moduln der Wurzeln einer Borelschen Function h^{ter} Classe bilden eine Folge, die zur h^{ten} Bonnetschen Classe gehört, wie sich aus der Ungleichung von Schou ergiebt. Man braucht nur $|a_N| < r$ mit der obigen Ungleichung zu verbinden, um dies sofort einzusehen.

* Man könnte unschwer den Schouschen Satz wie folgt präcisieren: Es sei $\mathfrak{P}(x)$ eine Potenzreihe, deren Convergenzradius $= \rho$, r irgend eine positive Zahl $< \rho$, N die Anzahl der Wurzeln von $\mathfrak{P}(x) = 0$, deren Modul $\leqq r$, M $\mathfrak{P}_r$ der Maximalwert von $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| = r$, s eine Zahl grösser als 1 und kleiner als $\frac{\rho}{r}$; alsdann gilt N. log $s <$ log M $\mathfrak{P}_{s \cdot r}$, während der Schousche Satz nur besagt N. log $(s) <$ log M $\mathfrak{P}_{(s+1) \cdot r}$, also r nicht gestattet, über die Hälfte von ρ hinauszugehen.

Jetzt nehmen wir insbesondere an, dass die Folge der Wurzeln von $G(x)$ einen Bonnetschen Typus bildet, und bringen dadurch unsere Untersuchung in Berührung mit der Aussage des Satzes V.

14. Gehört α_n zur ersten Bonnetschen Classe, und ist k die kleinste ganze Zahl, für welche $\Sigma |\alpha_n|^{-k}$ noch convergiert, so definiert

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{x^{k-1}}{\alpha_n{}^{k-1}(x - \alpha_n)}$$

eine Function $G(x)$, deren "genre" nach LAGUERRE $= k - 1$ ist. Ist z. B. $\alpha_n = n^\alpha$, α keine ganze Zahl und

$$(k - 1)\,\alpha < 1 < k\alpha\,,$$

so definiert die Gleichung

$$\frac{\psi_\alpha'(x)}{\psi_\alpha(x)} = \frac{x^{k-1}}{n^{\alpha\,k(-1)}\,(x - n^\alpha)}$$

eine ganze Function ψ_α vom genre $k - 1$. Von dieser Function wissen wir, nach Satz V, dass für negative Werte von x, wenn $|x|$ über jede Grenze wächst,

$$\lim_{x=-\infty} \left|\frac{\psi_\alpha'(x)}{x^{k-1}\,.\,\psi_\alpha(x)}\right| . \;|x|^{\,k-\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\infty \frac{du}{u^{\alpha(k-1)}\,(1 + u^\alpha)} \text{ ist.}$$

Das letztere Integral wollen wir C_α nennen. Dieselbe Grenzbeziehung gilt, wenn ψ_α durch eine Function f ersetzt wird, deren Wurzeln α_n eine Folge bilden, die zum Typus n^α gehört. Dies Resultat ergiebt sich aus der nun folgenden Überlegung, welche den Beweis des Satzes V nachträglich ergänzt.

Es sei
$$p = \Sigma_1^\infty \frac{c_n}{x + a_n} \qquad q = \Sigma_1^\infty \frac{c_n'}{x + a_n'}\,.$$

Die c_n, c_n', a_n, a_n' seien positive Grössen, derart dass $\Sigma_1^\infty \frac{c_n}{a_n}$ und $\Sigma \frac{c_n'}{a_n'}$ convergieren, aber $\Sigma_1^\infty c_n$, $\Sigma_1^\infty c_n'$ divergieren. Ferner sei $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$ $\lim\limits_{n=\infty} a_n' = \infty$ und

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{a_n'} = 1 \qquad \lim_{n=\infty} \frac{c_n}{c_n'} = 1\,.$$

Alsdann ist, wenn x durch positive Werte über jede Grenze wächst,

$$\lim_{x=\infty} \frac{p}{q} = 1\,.$$

Es divergieren nämlich die Reihen

$$x\,.\,p = \Sigma_1^\infty \frac{c_n\,.\,x}{x + a_n}\,, \qquad x\,.\,q = \Sigma_1^\infty \frac{c_n' x}{x + a_n'}$$

in $x = \infty$ und genügen unter den gemachten Voraussetzungen dem Criterion K. Bilden wir nun

$$x\,.\,(p - q) = \Sigma_1^\infty\, x\,.\,\frac{x\,(c_n - c_n') + a_n' c_n - a_n c_n'}{(x + a_n)\,(x + a_n')}$$

und vergleichen wir den n^{ten} Term dieser Reihe mit dem n^{ten} Term der Reihe

$$x \, . \, q = \Sigma_1^\infty \frac{x \, . \, c_n'}{x + a_n'},$$

so erhalten wir als Quotient den Ausdruck

$$\frac{x(c_n - c_n') + a_n' c_n - a_n c_n'}{c_n'(x + a_n)},$$

welcher unter den zugestandenen Voraussetzungen offenbar, für $\lim x = \infty$ und $\lim n = \infty$, gleichmässig gegen 0 convergiert. Somit haben wir nach Theorem T

$$\lim_{x=\infty} \frac{x(p-q)}{x \, . \, q} = 0,$$

$$\text{d.h.} \lim_{x=\infty} \frac{p}{q} = 1. \qquad \text{Q. e. d.}$$

15. Nun ist es für uns von Wert, für die Function ψ_α viel genauere asymptotische Entwickelungen als die obige zu gewinnen. Zu diesem Zwecke machen wir von einem Calcül Gebrauch, den wir in folgendem den Calcül C nennen werden, und den wir zunächst ganz im allgemeinen characterisieren werden.

Es sei $\phi(0) + \phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \ldots + \phi(n) + \ldots$ eine Summe derart, wie wir sie im Anfang betrachtet haben. Wir zerspalten jedes Glied der Summe in seinen reellen und imaginären Bestandteil und betrachten die Summe der reellen und imaginären Bestandteile gesondert. Wir können somit die $\phi(n)$ als reelle Grössen ansetzen. Im inneren Convergenzbereiche der Summe ziehen wir eine stetige Curve $\mathfrak{C}$, welche in einem Grenzpunkt L der Convergenz mündet, oder betrachten eine Folge discontinuierlicher Lagen des Punktes P, welche einen Grenzpunkt L der Convergenz zum Grenzpunkt hat. Wir nehmen an, dass wir eine reelle Function $\phi(u)$ der reellen positiven Variabelen u und des Punktes P kennen, deren Wert für $u = n$ mit $\phi(n)$ identisch ist.

Für irgend eine gegebene Lage P_0 des Punktes P auf $\mathfrak{C}$ oder der Folge P_i sei nun $\phi(u)$ monoton abnehmend oder zunehmend in den Intervallen

$$u = 0 \ldots \alpha_1, \; u = \alpha_1 \ldots \alpha_2, \; u = \alpha_2 \ldots \alpha_3, \; \ldots u = \alpha_h \ldots \alpha_{h+1}, \; \ldots .$$

Der Sinn des Wachsens von $\phi(u)$ ändere sich daher in der Folge wachsender positiver Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_h \ldots$ und sonst nirgends. Rückt P_0 beim Grenzübergang nach L, so mögen die α sämmtlich ins ∞ fallen, oder auch nicht. Es ist dies für das folgende irrelevant.

Es seien $m_1, m_2 \ldots m_h \ldots$ ganze positive Zahlen, derart dass $m_1 \leqq \alpha_1 < m_1 + 1$, $m_2 \leqq \alpha_2 < m_2 + 1$, u. s. f. Um den Ideen eine feste Richtung zu geben

wachse $\phi(u)$ zwischen $u = 0$ und $u = m_1$,
nehme ab zwischen $u = m_1 + 1$ und $u = m_2$,
wachse wiederum zwischen $u = m_2 + 1$ und $u = m_3$,
u. s. f.

Alsdann ist
$$\phi(0) > \int_0^1 \phi(u)\,du > \phi(1),$$
$$\phi(1) > \int_1^2 \phi(u)\,du > \phi(2),$$
$$\cdots\cdots$$
$$\phi(m_1 - 1) > \int_{m_1-1}^{m_1} \phi(u)\,du > \phi(m_1),$$
mithin
$$\int_0^{m_1} \phi(u)\,du + \phi(m_1) > \phi(0) + \phi(1) + \ldots + \phi(m_1) > \int_0^{m_1} \phi(u)\,du + \phi(0).$$

Genau so ist
$$\int_{m_1+1}^{m_2} \phi(u)\,du + \phi(m_1+1) < \phi(m_1+1) + \ldots + \phi(m_2) < \int_{m_1+1}^{m_2} \phi(u)\,du + \phi(m_2);$$
dann wieder
$$\int_{m_2+1}^{m_3} \phi(u)\,du + \phi(m_2+1) > \phi(m_2+1) + \ldots + \phi(m_3) > \int_{m_2+1}^{m_3} \phi(u)\,du + \phi(m_3),$$
u. s. f.

Mithin
$$\int_0^{\infty} \phi(u)du - \Sigma_h \int_{m_h}^{m_{h+1}} \phi(u)\,du + \phi(m_1) + \phi(m_2) + \phi(m_2+1) + \phi(m_4) + \phi(m_4+1) + \phi(m_6) + \ldots$$
$$> \phi(0) + \phi(1) + \phi(2) + \ldots + \phi(n) + \ldots$$
$$> \int_0^{\infty} \phi(u)du - \Sigma \int_{m_h}^{m_{h+1}} \phi(u)\,du + \phi(0) + \phi(m_1+1) + \phi(m_3) + \phi(m_3+1) + \ldots$$

Wir gehen nun zur Grenze lim P = L über. Beim Grenzübergang G verschieben sich (allgemein gesprochen) die Lagen der α, und wir wollen annehmen, dass eine endliche bestimmte Anzahl derselben unter einer bestimmbaren endlichen Grenze a bleibt, während die übrigen α sämmtlich ins ∞ rücken. Dann betrachten wir nicht die Summe $\phi(0) + \phi(1) + \ldots$, sondern nur den Teil $\phi(a) + \phi(a+1) + \phi(a+2) + \ldots$ derselben. Die oben entwickelte Ungleichung giebt uns dann asymptotisch diese Summe in der Gestalt eines Integrals mit Zusatzgliedern der Form
$$\int_{m_h}^{m_{h+1}} \phi(u)\,du \quad \text{und} \quad \phi(m_h),\ \phi(m_{h+1}),$$
welche das eigenartige haben, dass alle m_h ins Unendliche rücken.

Ohne Zweifel kann man für den Ausdruck
$$\int_0^{\infty} \phi(u)\,du - \phi(0) - \phi(1) - \ldots - \phi(n) - \ldots$$

noch viele andere asymptotische Entwickelungen finden, z. B. dadurch, dass man den Ausdruck in Form eines Integrals schreibt, und für dies Integral den Mittelwertsatz oder andere Sätze ähnlicher Art anwendet. Für die Zwecke, welche wir hier im Auge haben, ist der Calcül C ausreichend und vielleicht sogar unersetzlich. Dennoch ist es ausserordentlich fraglich, ob dem Calcül C eine allgemeinere Bedeutung zukommt.

16. Es sei $\alpha > 1$, also $k = 1$, und

$$\frac{\psi_\alpha'}{\psi_\alpha} = \Sigma_1^\infty \frac{1}{x - n^\alpha}.$$

Wir betrachten zunächst negative Werte von x. Der Calcül C giebt dann sogleich,

wenn $$\phi(u) = \frac{1}{y + n^\alpha}, \quad \text{wo} \quad y = -x,$$

$$\int_0^\infty \phi(u)\, du + \frac{1}{y} > -\frac{\psi_\alpha'(-y)}{\psi_\alpha(-y)} > \int_0^\infty \phi(u)\, du.$$

Nun ist identisch $$\int_0^\infty \frac{du}{y + u^\alpha} = y^{\frac{1}{\alpha} - 1} \,.\, C_\alpha,$$

somit durch Integration zwischen 2 positiven Grenzen y_1, y_2

$$(y_2^{\frac{1}{\alpha}} - y_1^{\frac{1}{\alpha}})\,\alpha \,.\, C_\alpha + \log\frac{y_2}{y_1} > \log\frac{\psi_\alpha(-y_2)}{\psi_\alpha(-y_1)} > (y_2^{\frac{1}{\alpha}} - y_1^{\frac{1}{\alpha}})\,\alpha \,.\, C_\alpha,$$

wo $$y_2 > y_1,$$

oder $$e^{(y_2^{\frac{1}{\alpha}} - y_1^{\frac{1}{\alpha}})\,\alpha \,.\, C_\alpha} \,.\, \frac{y_2}{y_1} > \frac{\psi_\alpha(-y_2)}{\psi_\alpha(-y_1)} > e^{(y_2^{\frac{1}{\alpha}} - y_1^{\frac{1}{\alpha}})\,\alpha \,.\, C_\alpha}.$$

Setzen wir insbesondere $y_1 = 1$

$$e^{y_2^{\frac{1}{\alpha}} \,.\, \alpha C_\alpha} \,.\, y_2 > \frac{e^{\alpha \,.\, C_\alpha}}{\psi_\alpha(-1)} \,.\, \psi_\alpha(-y_2) > e^{y_2^{\frac{1}{\alpha}} \,.\, \alpha \,.\, C_\alpha}$$

für jeden Wert von $y_2 > 1$.

Für einen complexen Wert von x sei

$$x = v + i \,.\, w \,.,$$

also $$\frac{1}{x - n^\alpha} = \frac{v - n^\alpha}{(v - n^\alpha)^2 + w^2} - i \,.\, \frac{w}{(v - n^\alpha)^2 + w^2}.$$

Wir setzen $$P = \Sigma_1^\infty \frac{v - n^\alpha}{(v - n^\alpha)^2 + w^2}, \qquad Q = \Sigma_1^\infty \frac{w}{(v - n^\alpha)^2 + w^2}.$$

Es sei n_1 eine positive ganze Zahl, derart dass

$$n_1^\alpha < v < (n_1 + 1)^\alpha$$

also $n_1 = 0$, wenn v negativ, oder positiv aber kleiner als 1. Für Q haben wir dann offenbar 2 Intervalle anzusetzen, nämlich

$$u = 1 \ldots n_1 \quad \text{und} \quad u = n_1 + 1 \ldots\ldots \infty .$$

Im ersten Intervall nimmt $\phi(u)$ zu, im zweiten ab. Wir haben daher durch Calcül C

$$\int_0^\infty \frac{w \,.\, du}{(v-u^\alpha)^2+w^2} - \int_{n_1}^{n_1+1} \frac{w\,du}{(v-u^\alpha)^2+w^2} + \frac{w}{(v-n_1{}^\alpha)^2+w^2} > \mathrm{Q} > \int_0^\infty \frac{w\,du}{(v-u^\alpha)^2+w^2} - \int_{n_1}^{n_1+1} \frac{w\,du}{(v-u^\alpha)^2+w^2}.$$

Es ist aber identisch

$$\int_0^\infty \frac{v-u^\alpha-i\,.\,w}{(v-u^\alpha)^2+w^2}\,.\,du = (v+i\,.\,w)^{\frac{1}{\alpha}-1}\,.\,\mathrm{C}_\alpha\,;$$

somit
$$\int_0^\infty \frac{(v-u^\alpha)\,du}{(v-u^\alpha)^2+w^2} = \Re\,(v+i\,.\,w)^{\frac{1}{\alpha}-1}\,.\,\mathrm{C}_\alpha\,,$$

und
$$\int_0^\infty \frac{w\,du}{(v-u^\alpha)^2+w^2} = \Re\, i\,(v+i\,.\,w)^{\frac{1}{\alpha}-1}\,.\,\mathrm{C}_\alpha\,,$$

wo, wie gewöhnlich, $\Re\,(\xi)$ den reellen Teil von ξ bedeutet.

Setzen wir $v + i\,.\,w = r\,.\,e^{\phi\,.\,i}$, so kommt

$$\int_0^\infty \frac{w\,du}{(v-u^\alpha)^2+w^2} = -\,r^{\frac{1}{\alpha}-1}\,.\,\sin\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\phi\,.\,\mathrm{C}_\alpha\,.$$

Andererseits $\dfrac{v-u^\alpha}{(v-u^\alpha)^2+w^2}$ nimmt zu zwischen $u = 0 \ldots v - w$ (w positiv gedacht),
nimmt ab zwischen $v - w \ldots v + w$,
und wieder zu zwischen $v + w \ldots \infty$.

Ist $v < w$, so fällt das erste Intervall aus der Betrachtung.

Ist $w = 0$, so fällt das 2[te] Intervall fort. $\dfrac{1}{v-u^\alpha}$ nimmt sowohl im ersten als 2[ten] Intervall zu.

Es sei $w = 0$ und v positiv, ferner

$$n_1{}^\alpha < v < (n_1+1)^\alpha.$$

Durch Calcül C wird

$$\int_1^\infty \frac{du}{v-u^\alpha} - \int_{n_1}^{n_1+1} \frac{du}{v-u^\alpha} + \frac{1}{v-n_1{}^\alpha} > \mathrm{P} > \int_0^\infty \frac{du}{v-u^\alpha} - \int_{n_1}^{n_1+1} \frac{du}{v-u^\alpha} + \frac{1}{v} + \frac{1}{v-(n_1+1)^\alpha}.$$

Da die Bahn durch einen Pol von $\dfrac{1}{v-u^\alpha}$ geht, so schreiben wir statt

$$\int_0^\infty \frac{du}{v-u^\alpha} - \int_{n_1}^{n_1+1} \frac{du}{v-u^\alpha} \quad \text{besser} \quad \int_0^{n_1} \frac{du}{v-u^\alpha} - \int_{n+1}^\infty \frac{du}{u^\alpha - v}$$

Substituieren wir $s^\alpha = v \qquad u' = s \, . \, u,$ so wird

$$\int_0^{n_1} \frac{du}{v - u^\alpha} = s^{1-\alpha} \, . \int_0^{\frac{n_1}{s}} \frac{du}{1 - u^\alpha} \qquad \text{und}$$

$$\int_{n_1+1}^{\infty} \frac{du}{u^\alpha - v} = s^{1-\alpha} \, . \int_{\frac{n_1+1}{s}}^{\infty} \frac{du}{u^\alpha - 1}.$$

Die Integrale $\int_0^{\frac{n_1}{s}} \frac{du}{1 - u^\alpha}$ und $\int_{\frac{n_1+1}{s}}^{\infty} \frac{du}{u^\alpha - 1}$ haben offenbar einen bestimmten Wert für jeden positiven Wert von $v > 1$, der keine ganze Zahl ist. Bezeichnen wir die Integrale kurz mit b_v und c_v, so ist

$$\int_0^{n_1} \frac{du}{v - u^\alpha} - \int_{n_1+1}^{\infty} \frac{du}{u^\alpha - v} = v^{\frac{1}{\alpha} - 1}(b_v - c_v).$$

Wir wollen einen Moment abschweifen. Haben wir ein Integral $\int_0^{1-\eta} \frac{f(u)\, du}{1 - u}$, wo $f(u)$ im Intervall $0 \, . \, . \, . \, 1$ endlich und stetig und bei $u = 1$ in eine convergente Potenzreihe entwickelbar ist, so ist offenbar

$$\int_0^{1-\eta} \frac{f(u)}{1 - u} du = f(1) \, . \log \frac{1}{\eta} + \int_0^{1-\eta} \frac{f(u) - f(1)}{1 - u} du$$

und $$f(1) \, . \log \frac{1}{\eta} + \int_0^1 \frac{f(u) - f(1)}{1 - u} du - \eta \, . \, m > \int_0^{1-\eta} \frac{f(u)}{1 - u} du > f(1) \, . \log \frac{1}{\eta} + \int_0^1 \frac{f(u) - f(1)}{1 - u} du - \eta \, . \, \mathrm{M},$$

wo m den Minimalwert, M den Maximalwert der Function

$$\frac{f(u) - f(1)}{1 - u}$$

im Intervall $1 - \eta \, . \, . \, . \, 1$ bezeichnet.

Es sei nun $s = n_1 + \epsilon, \quad \frac{\epsilon}{n_1 + \epsilon} = \eta_1, \quad \frac{1 - \epsilon}{n_1 + 1} = \eta_2.$

$$b_v = \int_0^{\frac{n_1}{s}} \frac{du}{1 - u^\alpha} = \int_0^{1-\eta_1} \frac{du}{1 - u^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \, . \log \frac{1}{\eta_1} + \mathrm{K} + \eta_1 \, . \, \mathrm{H},$$

wo K eine Constante ist, und für *jeden* Wert von ϵ endlich und stetig ist, und wo $\lim\limits_{n_1 = \infty} \mathrm{H} =$ einer bestimmten Constanten ist.

Ähnlich ist $c_v = \int_{\frac{n_1+1}{s}}^{\infty} \frac{du}{u^\alpha - 1}$, wenn u durch $\frac{1}{u}$ ersetzt wird,

$$c_v = \int_0^{1-\eta_2} \frac{du}{u^{2-\alpha}(1 - u^\alpha)} = \frac{1}{\alpha} \, . \log \frac{1}{\eta_2} + \mathrm{K}' + \eta_2 \, . \, \mathrm{H}',$$

wo K′ und H′ eine ähnliche Bedeutung wie K und H oben haben.

Schliesslich wird $$b_v - c_v = \frac{1}{\alpha} \cdot \log \frac{\eta_2}{\eta_1} + \mathrm{K}'' + \eta_1 \cdot \mathrm{H} - \eta_2 \cdot \mathrm{H}'$$
$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \log \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} + \mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}}{n_1},$$

wo L eine Constante und M eine für alle in Betracht kommenden Werte von ϵ endliche und stetige Function ist, die für $n = \infty$ einen endlichen Grenzwert hat.

Somit erhalten wir

$$v^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(\frac{1}{\alpha}\log\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}}{n_1}\right) + \frac{1}{v - n_1^{\alpha}} > \frac{\psi_\alpha'(v)}{\psi_\alpha(v)} > v^{\frac{1}{\alpha}-1}\left(\frac{1}{\alpha}\log\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \mathrm{L} + \frac{\mathrm{M}}{n_1}\right)$$
$$+ \frac{1}{v} + \frac{1}{v - (n_1 + 1)^{\alpha}},$$

wenn $$v = (n_1 + \epsilon)^{\alpha}, \qquad 0 < \epsilon < 1.$$

Wenn wir ϵ constant halten, v dagegen unendlich gross wird, so giebt uns diese Ungleichung eine sehr genaue asymptotische Beziehung für $\frac{\psi_\alpha'(v)}{\psi_\alpha(v)} \cdot v^{1-\frac{1}{\alpha}}$, derzufolge

$$\lim_{v=\infty} \frac{\psi_\alpha'(v)}{\psi_\alpha(v)} \cdot v^{1-\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\log\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \mathrm{L}.$$

Die Wurzeln, für grosse Werte von v, von $\psi_\alpha' = 0$ erhält man also durch $\frac{1}{\alpha} \cdot \log \frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \mathrm{L} = 0$, natürlich asymptotisch. Ist z. B. $\alpha = 2$, so ist $\psi_\alpha(x) = \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}}$ und $\mathrm{L} = 0$, woraus $\epsilon = \frac{1}{2}$.

Ist w von Null verschieden, so sind $v - w$ und $v + w$ die Werte, in denen der Sinn des Wachsens von

$$\frac{v - u^{\alpha}}{(v - u^{\alpha})^2 + w^2}$$

sich ändert. Ist sowohl $v - w$ wie $v + w$ negativ, so folgt daher

$$\int_0^\infty \frac{v - u^{\alpha}}{(v - u^{\alpha})^2 + w^2}\,du > \mathrm{P} > \int_0^\infty \frac{v - u^{\alpha}}{(v - u^{\alpha})^2 + w^2}\,du - \frac{v}{v^2 + w^2}.$$

Ist $v - w$ negativ, dagegen $v + w$ positiv und n_1 die ganze Zahl, für welche $n_1^{\alpha} < v + w < (n_1 + 1)^{\alpha}$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{v - u^{\alpha}}{(v - u^{\alpha})^2 + w^2}\,du - \int_{n_1}^{n_1+1} \frac{v - u^{\alpha}}{(v - u^{\alpha})^2 + w^2}\,du + \frac{v}{v^2 + w^2} > \mathrm{P} > \int_0^\infty \frac{v - u^{\alpha}}{(v - u^{\alpha})^2 + w^2}\,du$$
$$- \int_{n_1}^{n_1+1} \frac{v - u^{\alpha}}{(v - u^{\alpha})^2 + w^2}\,du + \frac{v - n_1^{\alpha}}{(v - n_1^{\alpha})^2 + w^2} + \frac{v - (n_1 + 1)^{\alpha}}{[v - (n_1 + 1)^{\alpha}]^2 + w^2}.$$

Sind schliesslich $v - w$ wie $v + w$ positiv, und

$$n_1^{\alpha} < v - w < (n_1 + 1)^{\alpha} \qquad n_2^{\alpha} < v + w < (n_2 + 1)^{\alpha}$$

so wird

$$\int_0^\infty \frac{v-u^\alpha}{(v-u^\alpha)^2+w^2}\,du - \int_{n_1}^{n_1+1} \frac{v-u^\alpha}{(v-u^\alpha)^2+w^2}\,du - \int_{n_2}^{n_2+1} \frac{v-u^\alpha}{(v-u^\alpha)^2+w^2}\,du + \frac{v-n_1{}^\alpha}{(v-n_1{}^\alpha)^2+w^2}$$
$$+ \frac{v-(n_1+1)^\alpha}{[v-(n_1+1)^\alpha]^2+w^2} > \mathrm{P} >$$
$$\int_0^\infty \frac{v-u^\alpha}{(v-u^\alpha)^2+w^2}\,du - \int_{n_1}^{n_1+1} \frac{v-u^\alpha}{(v-u^\alpha)^2+w^2}\,du - \int_{n_2}^{n_2+1} \frac{v-u^\alpha}{(v-u^\alpha)^2+w^2}\,du + \frac{v}{v^2+w^2}$$
$$+ \frac{(v-n_2{}^\alpha)}{(v-n_2{}^\alpha)^2+w^2} + \frac{v-(n_2+1)^\alpha}{[v-(n_2+1)^\alpha]^2+w^2}.$$

In jedem Falle ist $\mathrm{P}+i\,.\,\mathrm{Q}$ darstellbar durch $\int_0^\infty \frac{du}{v+iw-u^\alpha}$ und eine Anzahl Zusatzglieder. Ist $w \neq 0$, so ist das Integral identisch $= (v+i.w)^{\frac{1}{\alpha}-1}\,.\,\mathrm{C}_\alpha$. Somit wird schliesslich eine Beziehung der Form erhalten

$$(\theta) \quad (v+i\,.\,w)^{\frac{1}{\alpha}-1}\,.\,\mathrm{C}_\alpha + \mathrm{A} > \frac{\psi_\alpha'(v+i\,.\,w)}{\psi_\alpha(v+i\,.\,w)} > (v+i\,.\,w)^{\frac{1}{\alpha}-1}\,.\,\mathrm{C}_\alpha + \mathrm{B},$$

wo A und B gewisse Zusatzglieder darstellen, $w \neq 0$, und die Zeichen $>$ sich sowohl auf reellen wie imaginären Bestandteil der betreffenden Grössen beziehen.

Sind x_2 und x_1 die Endpunkte einer Geraden $\mathfrak{G}$, innerhalb deren, wenn man sich von x_1 nach x_2 bewegt, in $dx = dv + i\,.\,dw$, dv wie dw positiv sind, so kann man obige Ungleichung mit $dv + i\,.\,dw$ multiplicieren und zwischen x_1 und x_2 integrieren.

Dadurch wird

$$\alpha\,.\,(x_2{}^{\frac{1}{\alpha}} - x_1{}^{\frac{1}{\alpha}})\,\mathrm{C}_\alpha + \int_{(\mathfrak{G})} \mathrm{A}\,(dv+idw) > \log \frac{\psi_\alpha(x_2)}{\psi_\alpha(x_1)} > \alpha\,.\,(x_2{}^{\frac{1}{\alpha}} - x_1{}^{\frac{1}{\alpha}})\,\mathrm{C}_\alpha$$
$$+ \int_{(\mathfrak{G})} \mathrm{B}\,(dv+idw).$$

Ist dagegen auf der Geraden dv positiv, aber dw negativ, so muss man in der Ungleichung (θ) i durch $-i$ ersetzen und erhält dann eine Ungleichung derselben Art wie im ersten Fall.

Die Grössen $\int_{(\mathfrak{G})} \mathrm{A}\,(dv+i\,dw)$ und $\int_{(\mathfrak{G})} \mathrm{B}\,(dv+idw)$ sind nun sämmtlich der Art, dass, wenn x_2 beliebig wächst, die Integrale kleiner bleiben als angebbare Multipla des Logaritmen von w^2+v^2. Denn da wir uns auf einer Geraden ins ∞ bewegen sollen, so ist w asymptotisch ein Multiplum von v, und alle Grössen, die A und B ausmachen, sind Multipla von $1/v$. Wir kommen daher leicht zu dem Resultat: Bewegt sich x auf einer Geraden nach ∞, so ist der asymptotische Ausdruck für $\psi_\alpha(x)$

$$\psi_\alpha(x) = x^\lambda e^{x^{\frac{1}{\alpha}}\,.\,\alpha\,.\,\mathrm{C}_\alpha},$$

wo λ eine Function von x ist, die immerfort zwischen angebbaren endlichen Grenzen bleibt. Voraussetzung ist nur, dass die Gerade nicht mit der positiven Axe coincidiert (oder ihr parallel laufend in demselben Sinne ins ∞ geht).

Auch Grenzübergänge anderer Art lassen sich durch obige Ungleichungen durchführen. Für die Zwecke dieser Arbeit ist die genaue Ausführung der angeregten Untersuchungen irrelevant, und wir wollen daher nur noch einige Worte über die Borelschen Functionen, deren Wurzeln einen Bonnetschen Typus bilden, zufügen.

Die Function $f(x)$ habe die Wurzeln $a_n = (\log n)^\mu$.

Ist μ eine rationale Zahl, $=\frac{a}{b}$, so setzen wir, wenn p die kleinste ganze in μ enthaltene Zahl und ρ die a^{te} Einheitswurzel bezeichnet,

$$g_n(x) = \frac{(e^{x^{\frac{b}{a}}} + e^{x^{\frac{b}{a}}\cdot\rho} + e^{x^{\frac{b}{a}}\cdot\rho^2} + \ldots + e^{x^{\frac{b}{a}}\cdot\rho^{a-1}})}{x^{p-1}} = \mathrm{H}(x),$$

die eventuell auftretenden negativen Potenzen von x vernachlässigend. Die ganze Function $\mathrm{H}(x)$ ist dann offenbar der Art, dass $\Sigma\frac{1}{\mathrm{H}(a_n)}$ divergiert, aber $\Sigma\frac{1}{\mathrm{H}(a_n)\,.\,a_n}$ convergiert.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma_1^\infty \frac{\mathrm{H}(x)}{\mathrm{H}(a_n)\,.\,x - a_n}$$

definiert eine Borelsche Function $f(x)$, denn es lässt sich leicht zeigen (in der Art wie es am Ende des 2^{ten} Capitels ausgeführt wird), dass der Maximalwert von $f(x)$, wenn $|x| = r$, $< e^{c^{r^{\frac{b}{a}}}\cdot c}$, wo c eine angebbare Constante. $\frac{f'(x)}{\mathrm{H}(x)\,.\,f(x)}$ ist eine der Reihen, wie sie im Satze V untersucht worden sind, wenn man x negativ wählt. Für diesen Fall kann man auch ganz leicht den Calcül C anwenden.

Ist μ keine rationale Zahl, aber > 1, so setzen wir

$$\mathrm{H}(x) = \psi_\mu(-x).$$

Nach den asymptotischen Beziehungen, welche für $\psi_\mu(-x)$ entwickelt waren, divergiert $\Sigma_1^\infty\frac{1}{\psi_\mu(-a_n)}$, aber $\Sigma_1^\infty\frac{1}{\psi_\lambda(-a_n)\,.\,a_n}$ convergiert. Im übrigen behalten die obigen Bemerkungen ihre Gültigkeit.

Auch wenn $\mu < 1$, kann man ähnlich verfahren, indem man $\mathrm{H}(x) = \psi_\mu(\rho\,.\,x)$ setzt, wo $|\rho| = 1$, im übrigen eine passend gewählte Grösse, und $\psi_\mu(x)$ die n^μ zu Nullpunkten hat, so dass $\frac{\psi_\mu'}{\psi_\mu} = \frac{x^{k-1}}{x^{(k-1)\mu}\,(x-n^\mu)}$, $(k-1)\,\mu < 1 < k\,.\,\mu$.

Man kann ganz genau so zu Borelschen Functionen höherer Classe aufsteigen. Die so gebildeten ganzen Functionen sind interessant, weil sie mancherlei Beziehungen zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten haben, wie auch zu ganzen Functionen, die durch bestimmte Integrale entstehen (nach Art der Inversen der Γ-Function oder der Riemannschen Primzahl-Function). Sie sind ausserdem für die allgemeine Theorie der ganzen Functionen sehr dienlich als Vergleichsfunctionen. Sehr häufig kann man nämlich mit Hülfe einer Ungleichung, welche wir jetzt noch entwickeln werden, Theoreme allgemeiner Art zurückführen auf den besonderen Fall der Functionen, die oben betrachtet wurden.

17. Ist $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ eine Folge positiver Grössen, deren Summe convergiert, und $a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ eine Folge positiver Grössen, die monoton wachsend ∞ zur Grenze haben, so ist immer

$$\lim_{n=\infty} \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n}{a_n} = 0.$$

Dies folgt sogleich aus der Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n}{a_n} &= \frac{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m}{a_n} + \frac{\alpha_{m+1} a_{m+1} + \ldots + \alpha_n a_n}{a_n} \\ &< \frac{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m}{a_n} + (\alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_n) \\ &< \frac{a_m}{a_n} \Sigma_1^\infty \alpha_i + (\alpha_{m+1} + \ldots + \alpha_n), \end{aligned}$$

wenn

$$m < n,$$

in Verbindung mit $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$ und der Convergenz der Reihe.

Divergente Reihen besitzen diese Eigentümlichkeit nicht. Ist $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + \ldots$ divergent, so kann man bei vorgegebener Zahl n eine Zahl p finden, so dass

$$\beta_n + \beta_{n+1} + \ldots + \beta_{n+p} > 1.$$

Wählen wir daher, für irgend eine Folge $n_1, n_2, n_3 \ldots$ immerfort und über alle Grenzen wachsender Indices die a_n so, dass

$$\begin{gathered} a_{n_1} = a_{n_1+1} = \ldots a_{n_1+p_1}, \\ a_{n_2} = a_{n_2+1} = \ldots a_{n_2+p_2} \\ \text{etc.}, \end{gathered}$$

so ist für diese Folge a_n (welche für wachsende n immerfort und über jede Grenze wachsen soll) $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n}{a_n}$ offenbar nicht $= 0$.

18. Sind die α_n ihrer Grösse nach geordnet, so kann man $a_n = \frac{1}{\alpha_n}$ wählen, und erhält dann

$$\lim_{n=\infty} n \,.\, \alpha_n = 0,$$

den Pringsheimschen Satz. Ist auch $\alpha_n \,.\, n$ eine geordnete Folge, so kann man $a_n = \frac{1}{\alpha_n \,.\, n}$ wählen, und es kommt $\lim\limits_{n=\infty} n \,.\, \log n \,.\, \alpha_n = 0$. Ist auch $n \log n \,.\, \alpha_n$

eine geordnete Folge, so kann man $a_n = \frac{1}{\alpha_n \,.\, n \,.\, \log n}$ setzen, was $\lim_{n=\infty} n \,.\, \log n \,.\, \log \log n \,.\, a_n = 0$ ergiebt, u. s. f.

Es sei nun $r_1, r_2 \ldots r_n \ldots$ eine Folge immerfort wachsender positiver Grössen, deren Grenzwert $= \infty$. Die Folge gehöre zur h^{ten} Bonnetschen Classe, es sei also (θ) $\Sigma_1^\infty n^{-1} \,.\, (\log n)^{-1} \,.\, (\log\log n)^{-1} \ldots (\log\log \ldots h-1 \text{ mal } (n))^{-1} \,.\, r_n^{-\lambda}$ für endliche positive Werte von λ convergent. Ist dann σ der Grenzpunkt der Convergenz (der Convergenzexponent h^{ter} Classe, oder die Ordnung h^{ter} Classe) und die Reihe in $\lambda = \sigma$ noch convergent, so haben wir, wenn wir $\alpha_n = n^{-1} \,.\, (\log n)^{-1} \ldots r_n^{-\sigma}$ setzen, da die Folge der α_n, wie der $n \,.\, \alpha_n$, wie auch der $n \,.\, \log n \,.\, \alpha_n \ldots$ und schliesslich der $n \,.\, \log n \ldots \log\log (h-1) \text{ mal } n \,.\, \alpha_n$ eine monoton abnehmende ist,

$$\lim_{n=\infty} \log\log \ldots h \text{ mal } (n) \,.\, r_n^{-\sigma} = 0.$$

Dies lässt sich auch schreiben

$$r_n > \eta \,.\, (\log\log \ldots h \text{ mal } (n))^{\frac{1}{\sigma}},$$

wo n einen nur von η abhängigen Index übersteigt. Divergiert die Reihe (θ) in $\lambda = \sigma$, so ersetzen wir σ durch $\sigma + \epsilon$, wo ϵ beliebig klein; die Schlussfolgerung bleibt dann erhalten.

Offenbar ist σ der kleinste Wert, für welchen eine solche Ungleichung bestehen kann.

19. Die Betrachtungen dieses ersten Capitels waren in ihrer Mehrheit derart, dass sie mehr oder weniger interessante Ergebnisse liefern, ohne aber zu einer allgemeinen Theorie zu führen. Wie man leicht die hier angeführten Beispiele, in denen die discutierten Metoden fruchtbar sind, noch bedeutend erweitern kann, so ist es auf der anderen Seite leicht, Beispiele von Functionen zu bilden, zu welchen die hier angeführten Sätze nur in einer sehr losen Beziehung stehen. Zu einer Vertiefung der Metoden gelangt man erst durch Einführung eines neuen Begriffes. Dieser Begriff wird seine Definition und Erläuterung in den nachfolgenden Seiten finden.

CAPITEL 2.

1. Es sei $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ eine convergente Summe, welche eine Function einer complexen Variabelen x definiere. Innerhalb eines Bereiches B habe u_n die singulären Punkte $a_{n,m}$. Die $a_{n,m}$ mögen in ihrer Gesammtheit eine Folge bilden, welche den einen Grenzpunkt a zulässt. *In* a sei jede der u_i regulär und habe dort den Wert 0. Verlangt ist, die Bedingungen aufzustellen, denen eine in B verlaufende und in a mündende Curve $\mathfrak{C}$ genügen muss, damit der Wert der Summe $\Sigma_1^\infty u_i$ bei Annäherung auf $\mathfrak{C}$ an $x = a$ die 0 zur Grenze habe.

Dies Problem führt zur Betrachtung gewisser Bereiche, welche wie folgt construiert sind. In einen einfach zusammenhängenden Bereich B werden unendlich viele Löcher $L_1, L_2, L_3 \ldots L_n \ldots$ gebohrt. Jedes Loch L_i stelle einen einfach zusammenhängenden Bereich dar. Keines der L_i schliesse den Punkt a ein, mit wachsendem n komme L_n aber dem Punkte a beliebig nahe. Der so hergestellte Bereich L werde asymptotischer Bereich um den Punkt a genannt. Die Gesammtheit der Bereiche L_i heisse der asymptotische Nichtbereich um a.

Im folgenden werden wir das oben angegebene Problem nicht in seiner Allgemeinheit angreifen, wir werden jedoch besondere Fälle von genügender Wichtigkeit und Ausdehnung in Angriff nehmen. Es wird sich zeigen, dass die Curve $\mathfrak{C}$ der Bedingung genügen muss, innerhalb eines asymptotischen Bereiches zu verlaufen, dessen asymptotischer Nichtbereich die $a_{n,m}$ einschliesst. Die Ausdehnung der Löcher L_i wird dabei nicht gleichgültig sein, sondern wird erst durch bestimmte Verfahrungsarten festzustellen sein.

Ohne von vornherein die Begriffe zu sehr complicieren zu wollen, werden wir doch noch zwei Bedingungen erwähnen, welchen die asymptotischen Bereiche genügen sollen. Schlägt man um a mit einem sehr kleinen Radius ρ einen Kreis, so muss die Summe des Flächeninhalts aller in diesem Kreise liegenden Löcher L_i im Verhältnis zum Flächeninhalt des Kreises mit ρ beliebig klein werden. Und ferner muss eine Contour C um a innerhalb des asymptotischen Bereiches möglich sein, deren Maximalabstand von a kleiner als $h\rho$, deren Minimalabstand von a grösser als $k\rho$ ist, wo h, k zwei beliebig vorgegebene Grössen kleiner als 1.

Es geht hieraus hervor, dass eine endliche Anzahl asymptotischer Bereiche um a einen asymptotischen Bereich um a gemein haben.

2. Im folgenden nehmen wir an, dass der Punkt a im Unendlichen liege, construieren für eine besondere Gattung von Reihen $\Sigma_1^\infty u_n$ den oben erwähnten asymptotischen Bereich, und zeigen seine Bedeutung für die Characterisierung der durch $\Sigma_1^\infty u_n$ definierten Function.

Es sei $u_n = \dfrac{1}{x - a_n}$. $\Sigma \dfrac{1}{|a_n|}$ sei convergent und $\dfrac{|a_n|}{n}$ sei $\geqq \dfrac{|a_n'|}{n'}$, wenn $n > n'$. Der asymptotische Bereich, in welchem $\Sigma_1^\infty \dfrac{1}{x - a_n}$ für $\lim x = \infty$ sich der 0 nähert, wird dann wie folgt construiert. Wir schlagen um a_n als Centrum einen Kreis L_n mit dem Radius r_n. $\lim\limits_{n=\infty} r_n$ sei $= \infty$, jedoch $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{r_n}{a_{n+1} - a_n} = 0$. Die Gesammtheit der Kreise L_n bildet den asymptotischen Nichtbereich.

Dies ergiebt sich leicht aus den Voraussetzungen. Es sei

$$f(x) = \Sigma_1^\infty \frac{1}{x - a_n},$$

alsdann ist
$$|f(x)| \leqq \Sigma_1^\infty \frac{1}{|x - a_n|}.$$

Es sei $|x|$ irgend eine Zahl grösser als $|a_m|$ und kleiner als $|a_{m+1}|$. Dann ist

$$\Sigma_1^{\infty} \frac{1}{|x - a_n|} = \Sigma_1^{m-1} \frac{1}{|x - a_n|} + \frac{1}{|x - a_m|} + \frac{1}{|x - a_{m+1}|} + \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{1}{|x - a_n|}.$$

Ferner ist

$$\Sigma_1^{m-1} \frac{1}{|x - a_n|} < \Sigma_1^{m-1} \frac{1}{|x| - |a_n|} < \Sigma_1^{m-1} \frac{1}{|a_m| - |a_n|}.$$

Setzen wir $a_n = n \,.\, b_n$, so ist $|b_n|$ nach Voraussetzung eine Folge niemals abnehmender Grössen. Somit ist

$$\Sigma_1^{m-1} \frac{1}{|a_m| - |a_n|} < \Sigma_1^{m-1} \frac{1}{m \,.\, |b_m| - n \,.\, |b_m|} < \frac{1}{|b_m|} \,.\, \Sigma_1^{m-1} \frac{1}{m - n} < \frac{\log m}{|b_m|}.$$

Nach der in 18 erörterten Erweiterung des Pringsheimschen Satzes ist dieser Ausdruck mit wachsendem m kleiner als jede beliebige Grösse. Mithin *a fortiori*

$$\lim_{m = \infty} \Sigma_1^{m-1} \frac{1}{x - a_n} = 0.$$

Andererseits ist

$$\Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{1}{|x - a_n|} < \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{1}{|a_n| - |x|} < \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{1}{|a_n| - |a_{m+1}|}$$

$$= \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} + \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{|a_{m+1}|}{(|a_n| - |a_{m+1}|)\,|a_n|} < \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} + \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{(m + 1)\,|b_{m+1}|}{(n\,|b_{m+1}| - (m + 1)\,|b_{m+1}|)\,n \,.\, |b_{m+1}|},$$

da ja $|b_n| \geqq |b_{m+1}|$ war,

$$= \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} + \frac{1}{|b_{m+1}|} \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{m + 1}{n\,(n - m - 1)}.$$

Es ist aber $\quad \dfrac{m + 1}{n\,(n - m - 1)}$ identisch $= \dfrac{1}{n - m - 1} - \dfrac{1}{n}$,

somit $\quad \Sigma_{m+2}^{\infty} \dfrac{m + 1}{n\,(n - m - 1)}$ asymptotisch $= \log m$.

Mithin schliesslich

$$\Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{1}{|x - a_n|} < \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} + \frac{\log m}{|b_{m+1}|}.$$

Aus der Convergenz von $\dfrac{1}{|a_n|}$ und der bereits angewandten Erweiterung des Pringsheimschen Satzes folgt demnach

$$\lim_{m = \infty} \Sigma_{m+2}^{\infty} \frac{1}{|x - a_n|} = 0.$$

Liegt x im asymptotischen Bereich, so ist

$$|x - a_m| \geqq r_m,$$
$$|x - a_{m+1}| \geqq r_{m+1}.$$

Auch war
$$\lim_{m=\infty} r_m = \infty.$$

Daraus geht dann zur Evidenz hervor, dass, wenn x im asymptotischen Bereiche sich dem Punkte $x = \infty$ annähert (d. h $|x|$ von irgend einer angebbaren Lage von x auf der Annäherungscurve niemals abnimmt),

$$\lim_{x=\infty} f(x) = 0. \qquad \text{Q. e. d.}$$

3. Ist
$$\phi(x) = \Pi_1^\infty \left(1 - \frac{x}{a_n}\right), \text{ so ist}$$

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = f(x).$$

Einen wie oben konstruierten asymptotischen Bereich wollen wir L nennen. Von einer ganzen Function F(x) (des genre 0), deren logaritmischer Differentialquotient in einem asymptotischen Bereich $\mathfrak{A}$ sich der 0 nähert, wollen wir sagen, sie *gehöre* zu dem asymptotischen Bereiche $\mathfrak{A}$. Alsdann können wir zeigen, dass zu L alle ganzen Functionen gehören, die sich in der Form schreiben lassen

$$c_0 \,.\, \phi(x) + c_1 \,.\, \phi'(x) + c_2 \,.\, \phi''(x) + \ldots + c_n \,.\, \phi^{(n)}(x) + \ldots,$$

wenn die c der Bedingung Ω genügen, dass die Reihe $\Sigma\, c_n \,.\, u^n$ einen von 0 verschiedenen Convergenzradius hat und $c_0 \neq 0$ ist.

Zunächst wollen wir nachweisen, dass, wenn die c der Bedingung Ω genügen, die Reihe $\Sigma c_n \,.\, \phi^{(n)}(x)$ eine ganze Function $\psi(x)$ von x darstellt. Nachdem wollen wir zur Evidenz bringen, dass $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)} = 0$, in L, und dass $\psi(x)$ eine Function des genre 0 ist, deren Nullpunkte im Nichtbereich von L liegen.

Nach einem Satze von POINCARÉ ist die n^{te} Wurzel aus dem n!fachen des n^{ten} Coeffizienten der Taylorschen Entwickelung einer Function des genre 0 in der Grenze für $n = \infty$ beliebig klein. Mit anderen Worten, es ist

$$|\phi^{(n)}(x)| < \delta^n,$$

wo δ eine beliebig vorgegebene Zahl ist, wenn nur n genügend gross gewählt wird. Der Wert von x ist dabei beliebig. Somit convergiert $\Sigma_1^\infty c_n \,.\, \phi^{(n)}(x)$ für jeden endlichen Wert von x, und stellt demnach eine ganze Function von x dar.

Es sei $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots$ eine Folge positiver Grössen, derart dass $\Sigma \dfrac{1}{\gamma_n}$ convergiert. Es sei ferner

$$\vartheta(x) = \Pi_1^\infty \left(1 + \frac{x}{\gamma_n}\right) = \Sigma_1^\infty k_n \,.\, x^n.$$

Alsdann ist $k_1, \frac{2 \cdot k_2}{k_1}, \frac{3 \cdot k_3}{k_2}, \ldots \frac{n \cdot k_n}{k_{n-1}}, \ldots$ eine Folge positiver immerfort abnehmender Grössen, deren Grenzwert die 0 ist. Denn es ist identisch

$$\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = \Sigma \frac{1}{x + \gamma_n},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = \Sigma - \frac{1}{(x+\gamma_n)^2} = \frac{\vartheta''(x)}{\vartheta(x)} - \left(\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}\right)^2.$$

Mithin für jeden positiven Wert von x

$$\frac{\vartheta''(x)}{\vartheta(x)} < \left(\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}\right)^2 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} > \frac{\vartheta''(x)}{\vartheta'(x)}.$$

Nach einem Satze von HERMITE ist

$$\vartheta'(x) = \vartheta'(0) \cdot \Pi\left(1 + \frac{x}{\gamma_n'}\right),$$

wo die γ_n' den γ_n zwischengelagert sind. Es ist somit auch

$$\frac{\vartheta''(x)}{\vartheta'(x)} > \frac{\vartheta'''(x)}{\vartheta''(x)} > \ldots > \frac{\vartheta^{(n+1)}(x)}{\vartheta^{(n)}(x)}.$$

Nach dem Satze von POINCARÉ zeigt sich, dass der Grenzwert der Folge 0 ist. Setzen wir noch $x = 0$, so haben wir damit die Behauptung verificiert.

Es sei nun angesetzt $\gamma_n = |x - a_n|,$

$$\vartheta(t) = \Pi_1^\infty \left(1 + \frac{t}{|x - a_n|}\right) = \Sigma_1^\infty k_n \cdot t^n.$$

Es ist identisch

$$\Pi_1^\infty \left(1 + \frac{t}{x - a_n}\right) = \frac{\phi(x+t)}{\phi(x)} = \Sigma_1^\infty \frac{\phi^{(n)}x}{n!\,\phi(x)} \cdot t^n.$$

Danach ist evident

$$\left|\frac{\phi^{(n)}x}{n!\,\phi\,x}\right| < k_n \quad \text{und} \quad \left|\frac{\phi^{(n)}(x)}{\phi(x)}\right| \leqq k_1^n$$

für jeden Wert von n und x. Mithin ist

$$\left|\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right| \leqq \Sigma |c_n| \cdot k_1^n.$$

Nähert sich innerhalb L x dem Punkte $x = \infty$, so war aber

$$\lim_{x=\infty} k_1 = 0.$$

Daraus kommt dann leicht, dass innerhalb L

$$\lim_{x=\infty} \left|\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right| = c_0.$$

Auch ist
$$\lim_{x=\infty} \left| \frac{\psi'(x)}{\phi(x)} \right| = 0.$$

Mithin
$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = 0, \quad \text{da ja } c_0 \neq 0.$$

Ein Satz, der, wie es scheint, von HERMITE und HURWITZ unabhängig von einander aufgefunden wurde, besagt folgendes: Ist innerhalb eines einfach zusammenhängenden Bereiches B eine Function u eindeutig und ohne wesentliche Singularitäten, und ist auf dem Rande von B überall $|u| < 1$, so nimmt u innerhalb B genau so oft den Wert 1 an als die Function dort den Wert ∞ annimmt. Der Beweis ruht darauf, dass $\int^{(\mathrm{R})} \frac{du}{1-u} = 0$, da bei Beschreibung des Randes R, wegen $|u| < 1$, $1 - u$ eine Contour beschreibt, die den Punkt $u = 0$ ausschliesst.

Wir beschreiben nun um jeden der Kreise L_n eine Contour C_n, die innerhalb des Bereiches L liegt: Wählen wir n genügend gross, so ist wegen

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi(x) - c_0 \cdot \phi(x)}{\phi(x)} = 0$$

auf C_n
$$\frac{\psi(x) - c_0 \cdot \phi(x)}{\phi(x)} < \delta.$$

Somit hat die Gleichung
$$\frac{\psi(x) - c_0 \cdot \phi(x)}{\phi(x)} = -c_0$$

innerhalb C_n genau so viel Wurzeln, als die linke Seite dort den Wert ∞ annimmt, d. h. genau eine. Die Wurzeln von $\psi(x)$ liegen daher im Nichtbereich von L, und zwar je eine ihrer Wurzeln in L_n, sobald n einen angebbaren Wert c übersteigt, der nur von den Werten $c_0, c_1, c_2 \ldots c_n, \ldots$ abhängig ist. Es ist danach $\psi(x)$ offenbar eine Function des genre 0, denn die Möglichkeit der Existenz eines störenden Factor der Form $e^{G(x)}$ ist nach den entwickelten Ungleichungen überhaupt ausgeschlossen.

4. Wir werden jetzt daran gehen, den allgemeineren Satz zu erweisen, den wir den Satz S nennen wollen.

Satz S: Ist $f(x) = \Sigma_1^\infty \frac{c_n}{x - a_n}$, wo die c_n und a_n der Bedingung Ω unterworfen sind, dass

1) $\Sigma_1^\infty \frac{c_n}{a_n}$ absolut convergiert,

2) $|a_n| \geqq |a_n'|$ wenn $n \geqq n'$,

3) $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$,

so giebt es einen asymptotischen Bereich, in welchem

$$\lim_{x=\infty} f(x) = 0.$$

Wollte man den Beweis des Satzes S in der Art und Weise führen, wie vorhin den Beweis des in 2 gegebenen Satzes, so würde man zu keinem Ergebnis gelangen. Der zu construierende asymptotische Bereich hängt ganz und gar von der Lagerung der a_n und c_n ab, und über diese kann man ohne besondere Annahmen ausserordentlich wenig sagen. Was sich allgemein sagen lässt, ist wenig mehr als in der Grenzbeziehung $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{|c|_1 + |c_2| + \ldots + |c_n|}{a_n} = 0$ enthalten ist, die aus den Betrachtungen des Art. 18 folgt; denn es lässt sich leicht zeigen, dass man Folgen c_n, a_n construieren kann, welche den Bedingungen Ω genügen und für die

$$\lim_{n=\infty} \frac{|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n|}{a_n} \,.\, r_n \quad \text{nicht mehr} = 0,$$

wo r_n irgend eine vorgegebene über alle Grenzen wachsende Folge darstellt.

Es ist
$$|f(x)| < \Sigma_1^\infty \frac{|c_n|}{|x - a_n|} < \Sigma_1^\infty \frac{|c_n|}{||x| - |a_n||}.$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass es eine Folge von Werten $|x|$ giebt, so dass $\lim |x| = \infty$ und $\lim \Sigma_1^\infty \dfrac{|c_n|}{||x| - |a_n||} = 0$. In dem Ausdruck $\Sigma_1^\infty \dfrac{|c_n|}{||x| - |a_n||}$ fassen wir alle Glieder zusammen, für welche der Modul des Pols $|a_n|$ denselben Wert hat. Dadurch erhalten wir einen Ausdruck genau derselben Art. Da wir zunächst nur von positiven Grössen sprechen werden, schreiben wir bis auf weiteres statt $|a_n|$, $|c_n|$ und $|x|$ kurz a_n, c_n, x.

Es sei x grösser als a_m, jedoch kleiner als a_{m+1}. $a_{m+1} - a_m$, nach obigem eine positive von 0 verschiedene Grösse, sei mit b_m bezeichnet und

$$x = a_m + \eta \,.\, b_m = a_{m+1} - \eta' \,.\, b_m$$

gesetzt, wo η, η' irgend 2 positive von 0 verschiedene Grössen, die der Beziehung genügen

$$\eta + \eta' = 1.$$

Es ist nun
$$\Sigma_1^\infty \frac{c_n}{|x - a_n|} = \Sigma_1^m \frac{c_n}{x - a_n} + \Sigma_{m+1}^\infty \frac{c_n}{a_n - x},$$

$$\Sigma_1^m \frac{c_n}{x - a_n} = \frac{c_m}{\eta \,.\, b_m} + \frac{c_{m-1}}{a_m - a_{m-1} + \eta \,.\, b_m} + \frac{c_{m-2}}{a_m - a_{m-2} + \eta \,.\, b_m} + \ldots,$$

$$\eta \,.\, \Sigma_1^m \frac{c_n}{x - a_n} = \frac{c_m}{a_{m+1} - a_m} + \frac{c_{m-1}}{\frac{1}{\eta}(a_m - a_{m-1}) + b_m} + \frac{c_{m-2}}{\frac{1}{\eta}(a_m - a_{m-2}) + b_m}$$

$$< \frac{c_m}{a_{m+1} - a_m} + \frac{c_{m-1}}{a_{m+1} - a_{m-1}} + \frac{c_{m-2}}{a_{m+1} - a_{m-2}} + \ldots = p_m.$$

Ähnlich ist

$$\Sigma_{m+1}^{\infty} \frac{c_n}{a_n - x} = \frac{c_{m+1}}{\eta' \, . \, b_m} + \frac{c_{m+2}}{a_{m+2} - a_{m+1} + \eta' \, . \, b_m} + \frac{c_{m+3}}{a_{m+3} - a_{m+1} + \eta' \, . \, b_m} + \ldots$$

und $$\eta' \, . \, \Sigma_{m+1}^{\infty} \frac{c_n}{a_n - x} < \frac{c_{m+1}}{a_{m+1} - a_m} + \frac{c_{m+2}}{a_{m+2} - a_m} + \frac{c_{m+3}}{a_{m+3} - a_m} + \ldots = q_m.$$

Wenn es Indices m giebt, für welche p_m und q_m kleiner wird als eine beliebig vorgegebene Grösse, so wird es auch eine Folge über alle Grenzen wachsender Grössen $|x|$ geben, für welche $f(x)$ kleiner als eine beliebig vorgegebene Grösse wird.

$$p_m \text{ war } = \Sigma_{0}^{m-1}{}_h \frac{c_{m-h}}{a_{m+1} - a_{m-h}} \quad \text{und} \quad q_m = \Sigma_{1}^{\infty}{}_h \frac{c_{m+h}}{a_{m+h} - a_m}.$$

Wenn $a_{m+h'} > 2 \, . \, a_m$ wird, so ist

$$\Sigma_{h'}^{\infty}{}_h \frac{c_{m+h'}}{a_{m+h'} - a_m} < 2 \, . \, \Sigma_{h'}^{\infty}{}_h \frac{c_{m+h'}}{a_{m+h'}},$$

und diese Summe wird für genügend grosse m kleiner als eine beliebig vorgegebene Grösse, da nach Voraussetzung die Summe $\Sigma_{1}^{\infty}{}_h \frac{c_h}{a_h}$ convergiert. Somit setzen wir

$$q_{m'} = \Sigma_{1}^{h'}{}_h \frac{c_{m+h}}{a_{m+h} - a_m},$$

wo h' definiert ist als der kleinste Index, für den $a_{m+h'} \geqq 2 \, . \, a_m$, und stellen uns nun die Aufgabe, zu erweisen, dass die 0 einer der Grenzpunkte der Folge $p_m + q_m'$ ist. Der Beweis ist möglich nach der hier befolgten Metode.

Zunächst machen wir eine Voraussetzung V über die Folge der a_n, welche aber die Allgemeinheit in keiner Weise einschränkt. Wir nehmen an, dass $a_{n+1} - a_n$ kleiner sei als eine Constante ϵ, und dass $\lim_{n=\infty} a_{n+1} - a_n = 0$. Trifft für die thatsächlich gegebene Folge diese Voraussetzung nicht zu, so steht es uns frei, der Function $f(x)$ soviel Glieder der Form $\frac{c}{x-a}$ zuzusetzen, dass für die so condensierte Folge der a die Voraussetzung zutrifft. Die c der Zusatzglieder wählen wir sämmtlich $= 0$, oder, wenn wir wollen, von 0 verschieden und so klein, dass die Summe $\Sigma \frac{c}{a}$ immer noch convergiert. Ist für die erweiterte Function der zu beweisende Satz richtig, so ist er es auch gewiss für $f(x)$.

Wir definieren nun vier Functionen einer reellen positiven Variabelen ξ durch die Gleichungen

$$\mathrm{A}(\xi) = \Sigma_1^{\infty} (a_{n+1} - a_n) \, \xi^{a_{n+1}},$$
$$\mathrm{B}(\xi) = \Sigma_1^{\infty} c_n \, . \, \xi^{a_n},$$
$$\mathrm{C}(\xi) = \Sigma_1^{\infty} p_n \, . \, (a_{n+1} - a_n) \, . \, \xi^{a_{n+1}},$$
$$\mathrm{D}(\xi) = \Sigma_1^{\infty} q_n' \, (a_{n+1} - a_n) \, . \, \xi^{a_{n+1}}.$$

Diese vier Functionen, wie sich sehr bald zeigen wird, sind durch obige Reihen erklärt für die Werte $\xi < 1$.

Es handelt sich nun um die asymptotische Darstellung der vier Functionen bei $\xi = 1$. Der Kürze wegen werden wir statt des häufig wiederkehrenden

$$\lim_{\xi = 1} \frac{u}{v} = 1$$

einfacher schreiben $u \equiv v$. Ferner werden wir einen öfter wiederkehrenden Prozess kurz $\mathfrak{P}$ nennen. Der Prozess ist auf $B(\xi)$ angewandt der folgende. Es ist

$$B(\xi) = \Sigma_1^\infty c_n \,.\, \xi^{a_n}, \quad \text{also, wenn } \xi < 1,$$

$$\Sigma_1^\infty c_n \,.\, \xi^{E(a_n)} > B(\xi) > \Sigma_1^\infty c_n \,.\, \xi^{E(a_n)+1}.$$

Nun fassen wir alle Glieder zusammen, die mit demselben Exponenten ξ^m multipliciert sind, und nennen den resultierenden Coefficienten von ξ^m c_m'.

$$\Sigma_1^\infty c_m' \,.\, \xi^m = L(\xi).$$

Es ist also
$$L(\xi) > B(\xi) > \xi \,.\, L(\xi)$$

und
$$B(\xi) \equiv L(\xi).$$

Offenbar ist $\Sigma_1^\infty \frac{c_m'}{m}$ convergent, daher auch

$$\int_0^1 L(\xi) \,.\, d\xi.$$

Auf $A(\xi)$ angewandt liefert $\mathfrak{P}$ nach Theorem T und V

$$A(\xi) \equiv \frac{1}{1-\xi}.$$

Ehe wir $\mathfrak{P}$ auf $C(\xi)$ und $D(\xi)$ anwenden können, müssen wir dieselben transformieren. Wir ordnen $C(\xi)$ und $D(\xi)$ um, indem wir alle Glieder, die mit demselben Coefficienten c_n multipliciert sind, zusammenfassen. Dadurch wird

$$C(\xi) = \Sigma_1^{\infty}{}_n\, c_n\, \Sigma_1^{\infty}{}_h\, \frac{a_{n+h} - a_{n+h-1}}{a_{n+h} - a_n} \,.\, \xi^{a_{n+h}}.$$

Setzen wir
$$\Sigma_1^{\infty}{}_h\, \frac{a_{n+h} - a_{n+h-1}}{a_{n+h} - a_n} \,.\, \xi^{a_{n+h}} = \xi^{a_n} \,.\, E_n(\xi), \quad \text{so ist}$$

$$\xi \,.\, \frac{\partial}{\partial \xi}(E_n) = \Sigma_1^{\infty}{}_h\, (a_{n+h} - a_{n+h-1}) \,.\, \xi^{a_{n+h} - a_n},$$

was nach $\mathfrak{P}$ und Theorem T und V sich verhält wie $\frac{1}{1-\xi}$. Mithin

$$E_n \equiv \log\left(\frac{1}{1-\xi}\right), \quad \text{und nach Theorem T}$$

$$C(\xi) \equiv B(\xi) \,.\, \log\left(\frac{1}{1-\xi}\right).$$

$\int_0^1 \frac{C(\xi)}{\log\left(\frac{1}{1-\xi}\right)} d\xi$ ist also convergent. Wir werden nachweisen, dass dasselbe richtig ist für $\int_0^1 \frac{D(\xi)}{\log\left(\frac{1}{1-\xi}\right)} d\xi$. Die Notwendigkeit dieses Nachweises war auch der Grund, warum wir statt der q_n die q_n' einführen mussten; denn $\int_0^1 \frac{d\xi \,.\, \Sigma_1^\infty q_n (a_{n+1} - a_n) \xi^{a_{n+1}}}{\log\left(\frac{1}{1-\xi}\right)}$ wäre im allgemeinen nicht mehr convergent.

Es ist, wenn wir in $D(\xi)$, wie es vorhin bei $C(\xi)$ gethan wurde, die Glieder zusammenfassen, welche zu demselben Coefficienten c_n gehören,

$$D(\xi) = \Sigma_1^\infty{}_n\, c_n \,\Sigma_0^k{}_h \frac{a_{n-h+1} - a_{n-h}}{a_n - a_{n-h}} \xi^{a_{n-h+1}}.$$

Dabei ist k die grösste ganze Zahl, für welche die Ungleichung gilt

$$a_{n-k} > \tfrac{1}{2} \,.\, a_n,$$

also für jedes gegebene n bestimmt. Nun ist evident, nach V,

$$\Sigma_0^k{}_h \frac{a_{(n-h+1)} - a_{n-h}}{a_n - a_{n-h}} \,.\, \xi^{a_{n-h+1}} < \Sigma_0^k{}_h \frac{a_{n-h+1} - a_{n-h}}{a_n - a_{n-h}} \,.\, \xi^{a_{n-h}}, \qquad \text{jedoch}$$

$$> x^c \,\Sigma_0^k{}_h \frac{a_{n-h+1} - a_{n-h}}{a_n - a_{n-h}} \,.\, \xi^{a_{n-h}}.$$

Andererseits ist

$$-\xi \,.\, \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\xi^{-a_n} \,.\, \Sigma_0^k{}_h \frac{a_{n-h+1} - a_{n-h}}{a_n - a_{n-h}} \,.\, \xi^{a_{n-h}}\right] = \Sigma_0^k{}_h \,(a_{n-h+1} - a_{n-h})\, \xi^{a_{n-h}},$$

somit nach $\mathfrak{P}$ und V

$$\left[\xi^{-a_n} \,.\, \Sigma_0^k{}_h \frac{a_{n-h+1} - a_{n-h}}{a_n - a_{n-h}} \,.\, \xi^{a_{n-h+1}}\right] \equiv \frac{\xi^{-1}}{2} + \frac{\xi^{-2}}{3} + \frac{\xi^{-3}}{4} + \ldots + \frac{\xi^{-\frac{\nu}{2}}}{\frac{\nu}{2}},$$

$$\text{wo } \nu = E(a_n),$$

und nach $\mathfrak{P}$ und Theorem T

$$D(\xi) \equiv \Sigma_1^\infty{}_n\, c_n \left(\frac{\xi^{\nu-1}}{2} + \frac{\xi^{\nu-2}}{3} + \ldots + \frac{\xi^{\frac{\nu}{2}}}{\frac{\nu}{2}}\right) \equiv \Sigma_1^\infty{}_m\, c_m' \left(\frac{\xi^{m-1}}{2} + \frac{\xi^{m-2}}{3} + \ldots + \frac{\xi^{\frac{m}{2}}}{\frac{m}{2}}\right).$$

Es ist aber offenbar nach $\mathfrak{P}$

$$\Sigma_1^\infty{}_m\, c_m' \left(\tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\frac{m}{2}}\right) \,.\, \xi^{m-1} < D(\xi) < \Sigma_1^\infty{}_m\, c_m' \left(\tfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{\frac{m}{2}}\right) \,.\, \xi^{\frac{m}{2}}$$

oder, das Zeichen $<$ asymptotisch aufgefasst, nach Theorem T

$$\Sigma_1^\infty{}_m\, c'_m \,.\, \log m \,.\, \xi^m \leqq \mathrm{D}(\xi) \leqq \Sigma_1^\infty{}_m\, c'_m \,.\, \log m \,.\, \xi^{\frac{m}{2}}.$$

Auch ist

$$\Sigma_1^\infty{}_m c'_m \,.\, \xi^m \left(\xi + \frac{\xi^2}{2} + \ldots + \frac{\xi^m}{m}\right) < (\Sigma_1^\infty{}_m c'_m \,.\, \xi^m) \log\left(\frac{1}{1-\xi}\right), \qquad \text{also}$$

$$\Sigma_1^\infty{}_m c'_m \,.\, \log m \,.\, \xi^{2m} \leqq \Sigma_1^\infty{}_m c'_m \,.\, \xi^m \,.\, \log\left(\frac{1}{1-\xi}\right).$$

Daraus geht dann zur Evidenz hervor, dass die Operation $\int_0^1 \frac{d\xi}{\log \frac{1}{1-\xi}} \,.\, \vartheta(\xi)$, auf

$$\vartheta(\xi) = \mathrm{D}(\xi)$$

angewandt, convergent sein muss.

Wäre nun $p_n + q_n'$ für jeden Wert von n grösser als eine angebbare endliche, von Null verschiedene positive Zahl δ, so wäre

$$\Sigma_1^\infty (p_n + q_{n'})(a_{n+1} - a_n)\, \xi^{a_{n+1}} > \delta \mathrm{A}(\xi),$$

also
$$\frac{\mathrm{C}(\xi) + \mathrm{D}(\xi)}{\log\left(\frac{1}{1-\xi}\right)} > \frac{\delta \,.\, \mathrm{A}(\xi)}{\log\left(\frac{1}{1-\xi}\right)}.$$

Nun war aber

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{C}(\xi) + \mathrm{D}(\xi)}{\log\left(\frac{1}{1-\xi}\right)} d\xi \quad \text{convergent, während}$$

wegen
$$\mathrm{A}(\xi) \equiv \frac{1}{1-\xi}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{A}(\xi)}{\log\left(\frac{1}{1-\xi}\right)} d\xi \quad \text{divergiert.}$$

Somit kann eine solche Zahl δ nicht existieren. Wie klein auch eine vorgegebene Zahl δ sei, die Folge $p_n + q_n'$ enthält immer Glieder, welche kleiner sind als δ.

Dasselbe ist auch wahr für $p_n + q_n$, also auch für p_n wie q_n individuell. Nun hatten wir aber

$$|f(x)| < \frac{p_m}{\eta} + \frac{q_m}{\eta'}.$$

Somit erhalten wir: Ist $f(x) = \Sigma_1^\infty \frac{c_n}{x - a_n}$ gegeben, so bilden wir alle Ausdrücke p_n und q_n mit Hülfe der Folgen $|c_n|$ und $|a_n|$. Wir bilden dann $p_n + q_n$ und bestimmen diejenige Reihe der Indices

$$1, n_1, n_2, n_3 \ldots n_j \ldots \ldots$$

für welche $p_{n_j} + q_{n_j}$ kleiner ist als jedes der vorhergehenden Glieder der Folge $p_n + q_n$. Diese Folge von Indices existiert nach obigem und erstreckt sich ins Unendliche. Die $|a_{n_j}|\,|a_{n_j+1}|$ nennen wir die *ausgezeichneten Intervalle.*

Die Werte von p_n nennen wir δ_j und diejenigen

von q_{n_j} . . . . . ϵ_j .

Es ist dann $\lim\limits_{j=\infty} \delta_j = 0$ und $\lim\limits_{j=\infty} \epsilon_j = 0$. Alsdann bestimmen wir irgend eine Folge positiver Zahlen

$$\eta_j\,,\ \eta_j{}'$$

derart, dass beide von 0 verschieden sind, dass

ferner
$$\eta_j + \eta_j{}' = 1,$$

und dass
$$\lim_{j=\infty} \frac{\delta_j}{\eta_j} + \frac{\epsilon_j}{\eta_j{}'} = 0\,.$$

Schlagen wir dann mit $r_j = |a_{n_j}| + \eta_j\,(|a_{n_j+1} - a_{n_j}|)$ Kreise C_j um den Nullpunkt, so ist für jeden Punkt x_j auf dem Kreise C_j

$$|f(x_j)| < \frac{\delta_j}{\eta_j} + \frac{\epsilon_j}{\eta_j{}'}$$

und
$$\lim_{j=\infty} |f(x_j)| = 0\,.$$

Alle Pole a, deren Modul grösser als $|a_{n_j}|$ und kleiner als, oder $= |a_{n_{j+1}}|$ ist, fassen wir in eine Gruppe G_j zusammen. Dieselbe umgeben wir mit einer Contour L_j, die derart construiert ist, dass die Summe $\Sigma \left|\frac{c}{x-a}\right|$, erstreckt über die Punkte a der Gruppe G_j, für *alle* Punkte x ausserhalb L_j kleiner ist als die grössere der beiden Zahlen

$$\frac{\delta_j}{\eta_j} + \frac{\epsilon_j}{\eta_j{}'} \quad \text{und} \quad \frac{\delta_{j+1}}{\eta_{j+1}} + \frac{\epsilon_{j+1}}{\eta'_{j+1}}\,.$$

Die L_j bilden dann den asymptotischen Nichtbereich des zu construierenden asymptotischen Bereiches L. Es ist offenbar in L $\lim\limits_{x=\infty} f(x) = 0$. Dass L die beiden in 1 erwähnten Bedingungen erfüllt, erhellt aus der Thatsache, dass eine beliebige endliche Anzahl solcher Bereiche L wiederum einen solchen Bereich L gemein haben; und dass Kreise in L möglich sind, deren Radius beliebig gross wird.

5. Der Satz S lässt sich mit den bereits verwandten Hülfsmitteln erweitern auf Functionen

$$f(x) = \Sigma \frac{c_n x + c_n{}'}{(x-a_n)^2}\,,$$

derart dass $\Sigma \frac{c_n}{a_n}$ und $\Sigma \frac{c_n{}'}{a_n{}^2}$ absolut convergieren.

Es tritt nur an Stelle der einfachen Integration nach ξ eine zweifache Integration nach ξ. Überhaupt liesse er sich aussprechen für Summen $\Sigma_1^\infty u_n$, derart dass in $x = \infty$ $u_n = 0$, und dass u_n eine rationale Function von x ist, deren Nenner niemals einen angebbaren Grad überschreitet. Ohne Zweifel kann man ihn auch erweitern auf Summen $\Sigma_1^\infty u_n$, deren Terme u_n analytische Functionen von $\frac{1}{x}$ sind, die bei $\frac{1}{x} = 0$ regulär sich verhalten. Nur erfordert diese Erweiterung eine ungemein feine Differentiation in den Begriffsbildungen, und der Beweis dieses Satzes dürfte an Schwierigkeit den des Satzes S bedeutend überschreiten.

Der Satz S lässt sich sehr leicht nach einer anderen Richtung hin erweitern, welche für die Theorie der ganzen Functionen sehr wichtig ist. Nichts hindert uns im voranstehenden Beweis anzunehmen, dass die c_n irgendwie von x abhängen, wenn nur eine Constante c sich finden lässt, so dass für jede in Betracht kommende Lage von x $\Sigma_1^\infty \frac{|c_n|}{|a_n|} < c$. Daher kann man ohne weiteres den Satz S′ aussprechen, der lautet:

Satz S′: Ist $f(x) = \Sigma_1^\infty \frac{g_n(x)}{g_n(a_n)(x - a_n)}$, so giebt es einen asymptotischen Bereich L, in welchem

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{M(x)} = 0\,,$$

wo

$$M(x) = \left|\frac{g_1(x)}{a_1 \cdot g_1(a_1)}\right| + \left|\frac{g_2(x)}{g_2(a_2) \cdot a_2}\right| + \left|\frac{g_3(x)}{g_3(a_3) \cdot a_3}\right| + \ldots\ldots,$$

denn dann ist die obenerwähnte Zahl $c = 1$.

Es sei nun $\frac{G'(x)}{G(x)} = \Sigma_1^\infty \frac{g_n(x)}{g_n(a_n) \cdot (x - a_n)}$, wo $G(x)$ eine ganze Function.

$$\left|\frac{g_1(x)}{g_1(a_1)}\right| + \left|\frac{g_2(x)}{g_2(a_2)}\right| + \ldots + \left|\frac{g_n(x)}{g_n(a_n)}\right| + \ldots.$$

sei wiederum mit $M(x)$ bezeichnet. Integrieren wir zwischen irgend 2 Punkten x_2, x_1 eines im asymptotischen Bereiche liegenden Kreises mit Radius r um 0, so wird

$$\log \frac{G(x_2)}{G(x_1)} = \int_{x_1}^{x_2} \Sigma_1^\infty \frac{g_n(x)}{g_n(a_n) \cdot (x - a_n)} \cdot dx\,.$$

Ist $\delta \,.\, M(r)$ das Maximum von $\left|\frac{G'(x)}{G(x)}\right|$ auf jenem Kreise, so ist also

$$\left|\log \frac{G(x_2)}{G(x_1)}\right| < C \,.\, r \,.\, \delta \,.\, M(r),$$

wo $C \,.\, r$ die Länge des Bogens zwischen x_1 und x_2 misst, C also eine Grösse $< 2\pi$ ist. Aus dieser Beziehung fliesst sogleich

1) Das Maximum von $|G(x)|$ auf jenem Kreise ist $< e^{2\pi \cdot \delta \cdot r \cdot M(r)}$;
2) Das Minimum von $|G(x)|$ auf jenem Kreise ist $> e^{-2\pi \cdot \delta \cdot r \cdot M(r)}$,

$$\text{da ja } \left|\log \frac{G(x_2)}{G(x_1)}\right| > \log\left|\frac{G(x_2)}{G(x_1)}\right| \text{ ist.}$$

Ferner folgt noch: Das Wachstum des imaginären Teiles von $\log G(x)$, wenn x von x_1 nach x_2 sich continuierlich auf jenem Kreise bewegt, ist an absolutem Werte

$$< C \cdot r \cdot \delta \cdot M(r).$$

6. Ist insbesondere $G(x)$ eine Function des genre l, so ist $g_n(x) = x^l$, und es ergiebt sich daher aus 5 Satz: Ist $G(x)$ eine Function des genre l, so kann man eine Folge von Kreisen $C_1, C_2, C_3 \ldots C_n \ldots$ um den Nullpunkt mit den Radien $R_1, R_2 \ldots R_n \ldots$ bestimmen, derart dass für Punkte x auf C_n

$$|G(x)| > e^{-\delta \cdot R_n{}^{l+1}},$$

wenn nur n genügend gross gewählt wird, wie klein die vorgegebene positive Zahl δ auch sei.

In HADAMARD's berühmten preisgekrönten Abhandlung spielt ein Satz der obigen Art eine sehr wichtige Rolle. Ist ρ nach BOREL die Ordnung von $G(x)$, so ist zufolge des Satzes von HADAMARD eine Folge von Kreisen obiger Art möglich, auf der die Ungleichung besteht

$$|G(x)| > e^{-R^{\rho+\epsilon}},$$

wo ϵ eine beliebig kleine positive von 0 verschiedene Grösse bedeutet. Ist ρ keine ganze Zahl, so ist $\rho < l + 1$ und somit geht der Satz von HADAMARD dann weiter als der obige. Ist umgekehrt $\rho = l + 1$, so ist der hier ausgesprochene Satz der weitergehende.

Der Hadamardsche Satz lässt sich übrigens unschwer aus Satz S ableiten. Es sei $\Sigma_1^\infty |a_n|^{-\lambda}$ convergent, $l \leqq \lambda \leqq l + 1$. $l + 1 - \lambda$ setzen wir $= \sigma$. Dann ist in einem asymptotischen Bereiche L,

wenn wieder $$\frac{G'(x)}{x^l \cdot G(x)} = f(x) = \Sigma_1^\infty \frac{1}{a_n{}^l(x - a_n)} \quad \text{gesetzt ist,}$$

$$\lim_{x=\infty} x^\sigma \cdot f(x) = 0.$$

Es ist nämlich $$|x^\sigma \cdot f(x)| < \Sigma_1^\infty \frac{|x^\sigma|}{|a_n|^l \cdot \big||x| - |a_n|\big|}.$$

Ist $$|a_m| < |x| < |a_{m+1}|, \quad \text{so ist}$$

$$\Sigma_1^\infty \frac{|x^\sigma|}{|a_n{}^l|\,\big||x| - |a_n|\big|} = \Sigma_1^m \frac{|x^\sigma|}{|a_n|^l(|x| - |a_n|)} + \Sigma_{m+1}^\infty \frac{|x^\sigma|}{a_n{}^l(|a_n| - |x|)}.$$

Das Glied $$\Sigma_{m+1}^\infty \frac{|x^\sigma|}{a_n{}^l(|a_n| - |x|)} \quad \text{ist} \quad < \Sigma_{m+1}^\infty \frac{|a_n|^\sigma}{|a_n|^l(|a_n| - |x|)},$$

was nach Satz S für geeignete Lagen von x in den ausgezeichneten Intervallen von $\Sigma_1^\infty \frac{a_n^{\sigma-l}}{x - a_n}$ kleiner wird als jede beliebig vorgegebene Grösse. Andererseits ist

$$\Sigma_{m'}^{m} \frac{|x^\sigma|}{a_n^l(|x| - |a_n|)} - \Sigma_{m'}^{m} \frac{|a_n|^\sigma}{a_n^l(|x| - |a_n|)},$$

da

$$\frac{|x| - |a_n|}{|x|^\sigma - |a_n|^\sigma} < \frac{1}{\sigma} \cdot |a_n|^{1-\sigma}, \quad \text{wenn} \quad |x| > |a_n|$$

kleiner als

$$\Sigma_{m'}^{m} \frac{\sigma \cdot |a_n|^{\sigma-1}}{|a_n|^l}.$$

Hier ist m' irgend eine Zahl kleiner als m. Die letztere Summe ist ein Teil einer convergenten Summe, ist daher für genügend grosse Werte von m', die im Vergleich zu m aber noch sehr klein sein können, beliebig klein. Die Summe

$$\Sigma_1^{m'} \frac{|x|^\sigma}{|a_n|(|x| - |a_n|)}$$

aber ist augenscheinlich, wenn m im Vergleich zu m' sehr gross genommen wird, wegen

$$|x| > (a_m)$$

beliebig klein zu machen.

Somit ist nachgewiesen, dass ein asymptotischer Bereich L existiert, innerhalb dessen

$$\lim_{x=\infty} x^\sigma . f(x) = 0,$$

und da $f(x) = \frac{G'(x)}{x^l . G(x)}$ war, so erhalten wir durch die bereits angewandte Integration den Satz von HADAMARD. Das obige Verfahren erweitert den Satz von HADAMARD noch in soweit, dass es auch noch die Folgerung $G(x) > e^{-\delta . R^\rho}$ zulässt, wenn

$$\Sigma |a_n|^{-\rho} \text{ noch convergiert,}$$

wo, wie früher, ρ den Convergenzexponent der Folge $|a_n|$ bedeutet.

Der obige Beweis des Hadamardschen Satzes lässt sich übrigens unschwer nach verschiedenen Seiten hin zu einer Erweiterung des Satzes S benutzen. Doch ist es für den Augenblick unnötig, darauf näher einzugehen.

7. Man könnte die oben entwickelten Ungleichungen benutzen, um, dem schönen Ideengange der Hadamardschen und Borelschen Untersuchungen folgend, eine Theorie der ganzen Functionen aufzustellen. Es würde sich dabei empfehlen, den Begriff einer *Gattung* von ganzen Functionen einzuführen, wobei ein und derselben Gattung alle diejenigen Functionen angehören würden, deren $g_1(x) \ldots g_n(x) \ldots$ gegeben ist. Adoptiert man den Borelschen Standpunkt, dem derselbe bereits in seiner, in der 'Acta Mathematica,' 1896, erschienenen Abhandlung Ausdruck verliehen hat, so würde man

$$g_n(x) = x^{\rho_n}$$

setzen, wo ρ_n eine passend gewählte Folge ganzer Zahlen ist, die mit wachsendem n niemals abnehmen. Setzt man insbesondere

$$\rho_n = \mathrm{E}\left(\lambda \cdot \frac{\log n}{\log \log n}\right),$$

so würde die entstehende Gattung einen Teil der Borelschen Functionen 2ter Classe umfassen, nämlich jenen Teil, deren *Ordnung 2ter Classe* kleiner als die Constante λ sein würde. Für die Borelschen Functionen dritter Classe, deren Ordnung $< \lambda$, wäre

$$\rho_n = \mathrm{E}\left(\lambda . \frac{\log n}{\log \log \log n}\right) \text{ u.s.f.}$$

Man könnte sich mancherlei Aufgaben stellen, insbesondere, zu erweisen, wenn G_1 und G_2 einer Gattung G angehören, dass auch $G_1 + G_2$ wie $\frac{\partial}{\partial x} G_1$ ihr angehören, oder dass, wenn $f(x) = \Sigma \frac{c_n}{x - a_n}$ und $G(x)$ in den a_i verschwindet, $G(x) . f(x)$ derselben Gattung angehört wie $G(x)$. Wir können allerdings nicht, ohne die Grenzen dieser Abhandlung ungebührlich auszudehnen, auf die angeregten Probleme näher eingehen. Wir werden nur noch einen Satz entwickeln, der in gewissem Sinne die Umkehrung bildet zu Satz S und die Betrachtungen dieses Capitels zu einem vorläufigen Abschluss führt. Derselbe lautet:

Satz U: Ist $f(x)$ eine eindeutige analytische Function, welche innerhalb eines Bereiches B erklärt ist, und existiert in B ein asymptotischer Bereich L um einen singulären Punkt a von $f(x)$, so dass in L

$$\lim_{x=a} f(x) = 0,$$

so ist $f(x)$ entwickelbar in eine convergente Summe $\Sigma_1^\infty u_n(x)$, vermehrt um eine in $x = a$ convergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a)$, und zwar derart

1) dass die $u_n(x)$ durch die Singularitäten von $f(x)$ in B definiert sind;
2) dass alle $u_n(x)$ in $x = a$ regulär sind und dort den Wert 0 haben;
3) dass auch $\mathfrak{P}(x - a)$ in $x = a$ den Wert 0 hat.

Um den Satz zu erweisen, schlagen wir innerhalb L um a mit den Radien $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots . \rho_n \ldots .$ Kreise $C_1, C_2 \ldots . C_n \ldots .$ Die ρ_i bilden eine stetig abnehmende Reihe von Grössen, so dass $\lim_{n=\infty} \rho_n = 0$. (Statt der Kreise könnte man übrigens auch andere Contouren wählen, deren Maximalabstand von $a < h . \rho_n$, deren Minimalabstand von $a > k . \rho_n$, wo h, k vorgegebene Constanten. Die Möglichkeit solcher Contouren in L war in der Definition von L Bedingung.) Es sei z irgend ein nicht singulärer Punkt von $f(x)$ in C_1.

Es sei dann
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C_n)} \frac{f(x)}{(x - a)(x - z)} dx = I_n(z)$$

und
$$I_n(z) - I_{n+1}(z) = v_n(z).$$

$v_n(z)$ ist also das über die beiden Kreise C_n, C_{n+1} erstreckte Integral von $\frac{f(x)}{(x-a)(x-z)}dx$, dividiert durch $2\pi i$. Daher ist $v_n(z)$ eine eindeutige Function von z, welche nur von der Art der Singularitäten von $f(x)$, die zwischen C_n und C_{n+1} gelegen sind, bestimmt ist. Offenbar ist wegen

$$\lim_{x=a} f(x) = 0$$

auch

$$\lim_{n=\infty} I_n = 0,$$

mithin $\Sigma_1^\infty v_n(z)$ convergent für jede Lage von z in C_1.

z rücke zwischen C_m und C_{m+1}. Alsdann ist $I_m(z) - I_{m+1}(z)$ nicht mehr $= v_m(z)$, sondern, da $x = z$ einen Pol von $\frac{f(x)}{(x-a)(x-z)}$ bildet,

offenbar $$= -\frac{f(z)}{z-a} + v_m(z). \quad \text{Aus} \lim_{n=\infty} I_n = 0$$

kommt $$(I_1 - I_2) + (I_2 - I_3) + (I_3 - I_4) + \ldots\ldots = I_1,$$

mithin $$\Sigma_1^\infty v_n(z) = \frac{f(z)}{z-a} + I_1.$$

I_1 ist nun augenscheinlich eine eindeutige Function von z, welche für *jede* Lage von z innerhalb C_1 endlich ist. Mithin ist I_1 in eine Potenzreihe nach aufsteigenden Potenzen von $z - a$ entwickelbar, welche in C_1 convergiert. Setzen wir nun

$$\mathfrak{P}(z-a) = -(z-a)\,I_1(z)$$

und

$$u_n(z) = (z-a)\,v_n(z),$$

so ist der Satz U verificiert.

Aus Satz U folgt z. B. :—Liegen in dem asymptotischen Bereich L keine Singularitäten von $f(x)$, so ist $f(x)$ in L und dem Nichtbereich von L regulär, und es ist überhaupt $\lim_{x=a} f(x) = 0$. Oder auch: Hat $f(x)$ in L keine wesentlichen Singularitäten, sondern nur Pole $a_1, a_2 \ldots, a_n \ldots$ und ist in a_n

$$f(x) - \left(\frac{c_{1,n}}{x-a_n} + \frac{c_{2,n}}{(x-a_n)^2} + \ldots + \frac{c_{h,n}}{(x-a_n)^h}\right)(x-a)$$

regulär, so ist identisch

$$f(x) = \Sigma_1^\infty (z-a)\left[\frac{c_{1,n}}{z-a_n} + \frac{c_{2,n}}{(z-a_n)^2} + \ldots + \frac{c_{h,n}}{(z-a_n)^h}\right] - \mathfrak{P}(z-a).$$

Dabei ist die Summe $\Sigma_1^\infty \ldots$ für jeden Wert von z convergent, doch nicht absolut, sondern bedingt. Man muss, um die Convergenz der Summe zu sichern, immer diejenigen Terme zusammenfassen, welche den singulären Punkten a_i entsprechen, die gemeinsam zwischen 2 aufeinanderfolgenden Contouren C liegen. Selbst bei dieser Zusammenfassung ist die absolute Convergenz noch nicht erwiesen.